



1. Calcolare l'angolo formato dai vettori $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

2. Per quali $k \in \mathbb{R}$ la matrice $\begin{pmatrix} 3+k^3 & 2-k \\ 1+2k & -7 \end{pmatrix}$ ammette una base ortonormale di autovettori?

3. Se $A \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{C})$ e $A^* = -A$ si può concludere che $\det(A) = 0$?

4. Per quali $k \in \mathbb{R}$ coincidono i punti di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ di coordinate omogenee $[1+k : -2 : k-1]$ e $[2 : 2-k : 4-k]$?

5. Determinare il tipo affine della quadrica di equazione $3xy - yz + z^2 - 2x + 1 = 0$.

Geom 6. Quali punti all'infinito in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ ha il sottoinsieme di \mathbb{R}^2 di equazione $(x^2 + 1 - y^2)(y - x + 7)(4x + 3y - \pi) = 0$?

Geom 7. Esibire una 1-forma chiusa ω definita su \mathbb{R}^2 escluso il punto $(1, 0)$ tale che l'integrale di ω sul bordo del disco di centro 0 e raggio 2 valga 1.

GAII 8. Determinare $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ dove $f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x - 2y \\ 4x + y \end{pmatrix}$, $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ e $\mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$.

GAII 9. Sapendo che $A = (v_1 \ v_2 \ v_3)$ e $\det(A) = -\frac{1}{5}$ calcolare $\det(3v_3 - 2v_2 \ v_1 + 4v_3 \ 2v_1 - 3v_2)$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.



1. Considerare la matrice simmetrica $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

- (A) (4 punti) Trovare gli autovalori di A provando che uno è nullo.
 (B) (4 punti) Esibire una base ortonormale che diagonalizza A .
 (C) (4 punti) Esibire la proiezione ortogonale di \mathbb{R}^3 sull'immagine di A .

Geom 2. Considerare la funzione $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ data da $\alpha(t) = (\sin(\pi t), 2t^2 - 1)$.

Geom (A) (3 punti) Provare che α parametrizza una curva liscia, stabilire il segno della curvatura di α per $t = \frac{3}{2}$ e il valore della curvatura per $t = \frac{1}{2}$.

Geom (B) (3 punti) Chiamata β la restrizione di α a $[0, \frac{1}{2}]$ calcolare $\int_{\beta} e^{xy}(y dx + x dy)$.

Geom (C) (3 punti) Descrivere tutti gli intervalli I tali che la restrizione $\alpha|_I$ di α ad I sia una curva chiusa e verificare che ne esiste uno solo I_0 tale che $\gamma = \alpha|_{I_0}$ sia anche semplice.

Geom (D) (3 punti) Dire se il supporto di γ ammetta ovunque retta tangente e calcolare $\int_{\gamma} \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$.

GAII 3. Al variare di k in \mathbb{R} considerare la matrice $A_k = \begin{pmatrix} k+5 & 3 & -7k-16 \\ -3 & k-2 & 4k+9 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$.

- GAII (A)** (3 punti) Provare che per ogni k la A_k ha l'autovalore 1 e determinare un relativo autovettore.
GAII (B) (3 punti) Per $k = -1$ verificare che A_{-1} è diagonalizzabile ed esibire una base che la diagonalizza.
GAII (C) (3 punti) Per k generico determinare gli altri autovalori di A_k e discuterne la diagonalizzabilità.
GAII (D) (3 punti) Per $k = 1$ determinare il tipo affine della conica associata alla matrice ${}^t A_1 + A_1$.



Risposte esatte

5. \diamond

1. $\arccos\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{3}}\right)$

2. $k = \frac{1}{3}$

3. No, ad esempio $\begin{pmatrix} i & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

4. $k = 3$ e $k = -2$

5. Iperboloide a due falde

6. $[1 : 1 : 0]$, $[1 : -1 : 0]$ e $[3 : -4 : 0]$

7. $\omega = \frac{1}{2\pi} \frac{(x-1)dy - ydx}{(x-1)^2 + y^2}$

8. $\begin{pmatrix} -9 & 1 \\ 25 & -4 \end{pmatrix}$

9. 5

 1. \spadesuit 2. \heartsuit 3. \spadesuit 4. \clubsuit 5. \diamond 6. \spadesuit 7. \clubsuit 8. \heartsuit 9. \clubsuit 10. \diamond
