UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria — Corso di Laurea in Ingegneria Civile, dell'Ambiente e del Territorio

Geometria — Scritto del 18/6/09 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** _ _ _ _ _ _

1. Trovare gli autovalori di $\begin{pmatrix} 2-i & i \\ 3+4i & -1 \end{pmatrix}$ e una base che la diagonalizzi.

2. Determinare i vettori di $\mathbb{C}^2$ unitari, ortogonali a $(1+2i)e_1 + (3-i)e_2$ e aventi seconda coordinata immaginaria pura.

3. Stabilire per quali $z \in \mathbb{C}$ la matrice $\begin{pmatrix} 1+iz & z-i \\ z+i & z \end{pmatrix}$ ammette una base ortonormale di autovettori.

4. Siano $C = \{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) : \ x_2^2 = x_0^2 + x_1^2\}$ ed $E_j = \{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) : \ x_j = 1\}$. Classificare dal punto di vista affine le coniche $C \cap E_0$, $C \cap E_1$, $C \cap E_2$.

5. Determinare il tipo affine della quadrica di equazione $x^2 - y^2 - 4xy + 4xz - 6yz + 2y + 2z + 1 = 0$.

Geom **6.** Sia Γ la parabola $x_1 = x_0^2$ in $\mathbb{R}^2$ visto come il piano affine $E = \{[x] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) : \ x_2 = 1\}$. Esibire un cambiamento di coordinate proiettivo $f : \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ tale che $f(\Gamma) \cap E$ sia una circonferenza.

Geom **7.** Calcolare $\int_\alpha (3x^2y^2 \,\mathrm{d}x + 2x^3y \,\mathrm{d}y)$ con $\alpha : [0,2] \to \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) = (t \cdot \log_3(1+t), \sin(\pi t/4))$.

GAII **8.** Esibire una base di $\{z \in \mathbb{C}^3 : \ (1-i)z_1 + (1-2i)z_2 + (1+i)z_3 = 0\}$ nella quale ogni elemento abbia almeno due coordinate reali.

GAII **9.** Siano $\mathcal{B} = (2e_1 - e_2, e_1 + 2e_2)$, $\mathcal{C} = (3e_1 - e_2, -5e_1 + 2e_2)$ e $[v]_\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Calcolare $[v]_\mathcal{C}$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Geometria — Scritto del 18/6/09 — Esercizî

1. Siano $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$, $B = A + {}^{\mathrm{t}}A$ e $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(A) (4 punti) Stabilire se A sia diagonalizzabile.

(B) (4 punti) Determinare il tipo affine della conica associata alla matrice B.

(C) (4 punti) Determinare una base ortonormale rispetto al prodotto scalare canonico di $\mathbb{R}^3$ del sottospazio $\{x \in \mathbb{R}^3 : \ \langle x|v\rangle_B = 0\}$.

Geom **2.** Siano $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ data da $\alpha(t) = \begin{pmatrix} t\cos t \\ 2t\sin t \\ \cos t - t\sin t \end{pmatrix}$, $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ data dalla proiezione ortogonale di α sul piano di equazione $x_3 = 0$ identificato a $\mathbb{R}^2$, e γ la restrizione di α a $[0, 1]$.

Geom (A) (4 punti) Calcolare il segno della curvatura di β al variare di t.

Geom (B) (4 punti) Calcolare curvatura e torsione di α per $t = 0$;

Geom (C) (4 punti) Provare che il valore di $\int_\gamma < (x + y + 2z)$ è compreso tra la lunghezza di γ e il triplo di tale lunghezza.

GAII **3.** In $\mathbb{R}^3$ considerare il piano X di equazione $2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0$.

GAII (A) (4 punti) Esibire la proiezione ortogonale p di $\mathbb{R}^3$ su X.

GAII (B) (4 punti) Provare che la formula $f(x) = \begin{pmatrix} x_1 - x_3 \\ \frac{4}{3}x_1 - x_2 + 2x_3 \\ -2x_1 + 3x_2 - 3x_3 \end{pmatrix}$ definisce un'applicazione lineare da X in sé, verificare che $\mathcal{B} = (e_1 + 2e_2 + e_3, 6e_1 + 8e_2 + 3e_3)$ è una base di X ed esibire $[f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}$.

GAII (C) (4 punti) Stabilire se la f del punto precedente sia diagonalizzabile.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria. Dall'inizio della seconda ora si può usare anche un foglio manoscritto contenente enunciati e formule. Si può uscire solo in casi eccezionali. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La soluzione di ogni esercizio deve essere consecutiva su un solo foglio. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto di un esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.

Geometria — Scritto del 18/6/09 — Quesiti

Risposte esatte

5. ♡

1. $-2i$, $1+i$, $\begin{pmatrix} 1+2i \\ -5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2-i \\ 5 \end{pmatrix}$

2. $\pm\frac{1}{5\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 7-i \\ 5i \end{pmatrix}$

3. $z=0$

4. Iperbole, iperbole, ellisse

5. Iperboloide a una falda

6. Ad esempio $f([x_0 : x_1 : x_2]) = [x_0 : x_2 - x_1 : x_2]$

7. 8

8. Ad esempio $\begin{pmatrix} i-3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} i \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix} -13 \\ -8 \end{pmatrix}$