UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria — Corso di Laurea in Ingegneria Civile, dell'Ambiente e del Territorio

IN SUPREMÆ DIGNITATIS 1343

Geometria — Scritto del 18/6/09 — Quesiti

**Nome** ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ␣␣␣␣␣␣

**1.** Trovare gli autovalori di $\begin{pmatrix} 2-i & i \\ 3+4i & -1 \end{pmatrix}$ e una base che la diagonalizzi.

**2.** Determinare i vettori di $\mathbb{C}^2$ unitari, ortogonali a $(1+2i)e_1+(3-i)e_2$ e aventi seconda coordinata immaginaria pura.

**3.** Stabilire per quali $z\in\mathbb{C}$ la matrice $\begin{pmatrix} 1+iz & z-i \\ z+i & z \end{pmatrix}$ ammette una base ortonormale di autovettori.

**4.** Siano $C=\{[x_0:x_1:x_2]\in\mathbb{P}^2(\mathbb{R}):\ x_2^2=x_0^2+x_1^2\}$ ed $E_j=\{[x_0:x_1:x_2]\in\mathbb{P}^2(\mathbb{R}):\ x_j=1\}$. Classificare dal punto di vista affine le coniche $C\cap E_0$, $C\cap E_1$, $C\cap E_2$.

**5.** Determinare il tipo affine della quadrica di equazione $x^2-y^2-4xy+4xz-6yz+2y+2z+1=0$.

Geom **6.** Sia $\Gamma$ la parabola $x_1=x_0^2$ in $\mathbb{R}^2$ visto come il piano affine $E=\{[x]\in\mathbb{P}^2(\mathbb{R}):\ x_2=1\}$. Esibire un cambiamento di coordinate proiettivo $f:\mathbb{P}^2(\mathbb{R})\to\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ tale che $f(\Gamma)\cap E$ sia una circonferenza.

Geom **7.** Calcolare $\int_\alpha (3x^2y^2\,\mathrm{d}x+2x^3y\,\mathrm{d}y)$ con $\alpha:[0,2]\to\mathbb{R}^2$, $\alpha(t)=(t\cdot\log_3(1+t),\sin(\pi t/4))$.

GAII **8.** Esibire una base di $\{z\in\mathbb{C}^3:\ (1-i)z_1+(1-2i)z_2+(1+i)z_3=0\}$ nella quale ogni elemento abbia almeno due coordinate reali.

GAII **9.** Siano $\mathcal{B}=(2e_1-e_2,e_1+2e_2)$, $\mathcal{C}=(3e_1-e_2,-5e_1+2e_2)$ e $[v]_\mathcal{B}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$. Calcolare $[v]_\mathcal{C}$.

**Le risposte devono essere sinteticamente giustificate**

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

# Geometria — Scritto del 18/6/09 — Esercizî

**1.** Siano $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$, $B = A + {}^{\mathrm{t}}A$ e $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(A) (4 punti) Stabilire se $A$ sia diagonalizzabile.

(B) (4 punti) Determinare il tipo affine della conica associata alla matrice $B$.

(C) (4 punti) Determinare una base ortonormale rispetto al prodotto scalare canonico di $\mathbb{R}^3$ del sottospazio $\{x \in \mathbb{R}^3 : \langle x|v\rangle_B = 0\}$.

Geom **2.** Siano $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ data da $\alpha(t) = \begin{pmatrix} t\cos t \\ 2t\sin t \\ \cos t - t\sin t \end{pmatrix}$, $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ data dalla proiezione ortogonale di $\alpha$ sul piano di equazione $x_3 = 0$ identificato a $\mathbb{R}^2$, e $\gamma$ la restrizione di $\alpha$ a $[0, 1]$.

Geom (A) (4 punti) Calcolare il segno della curvatura di $\beta$ al variare di $t$.

Geom (B) (4 punti) Calcolare curvatura e torsione di $\alpha$ per $t = 0$;

Geom (C) (4 punti) Provare che il valore di $\int_\gamma < (x + y + 2z)$ è compreso tra la lunghezza di $\gamma$ e il triplo di tale lunghezza.

GAII **3.** In $\mathbb{R}^3$ considerare il piano $X$ di equazione $2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0$.

GAII (A) (4 punti) Esibire la proiezione ortogonale $p$ di $\mathbb{R}^3$ su $X$.

GAII (B) (4 punti) Provare che la formula $f(x) = \begin{pmatrix} x_1 - x_3 \\ \frac{4}{3}x_1 - x_2 + 2x_3 \\ -2x_1 + 3x_2 - 3x_3 \end{pmatrix}$ definisce un'applicazione lineare da $X$ in sé, verificare che $\mathcal{B} = (e_1 + 2e_2 + e_3, 6e_1 + 8e_2 + 3e_3)$ è una base di $X$ ed esibire $[f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}$.

GAII (C) (4 punti) Stabilire se la $f$ del punto precedente sia diagonalizzabile.

# Risposte esatte

## 5. ♡

**1.** $-2i$, $1+i$, $\begin{pmatrix} 1+2i \\ -5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2-i \\ 5 \end{pmatrix}$

**2.** $\pm\frac{1}{5\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 7-i \\ 5i \end{pmatrix}$

**3.** $z = 0$

**4.** Iperbole, iperbole, ellisse

**5.** Iperboloide a una falda

**6.** Ad esempio $f([x_0 : x_1 : x_2]) = [x_0 : x_2 - x_1 : x_2]$

**7.** 8

**8.** Ad esempio $\begin{pmatrix} i-3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} i \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

**9.** $\begin{pmatrix} -13 \\ -8 \end{pmatrix}$

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢