



Geometria — Scritto del 3/7/09 — Quesiti

Nome _____ Cognome _____ Matricola _____

1. Posto $A = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 3 \end{pmatrix}$ ortonormalizzare la base $(-ie_1, e_2)$ di $\mathbb{C}^2$ rispetto a $\langle \cdot | \cdot \rangle_A$.

2. Trovare gli autovalori di $\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$ e una base che la diagonalizzi.

3. Se $\mathbb{R}^2$ è identificato a $\{[x : y : z] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}), z = 1\}$, quale luogo si ottiene intersecando $\mathbb{R}^2$ con $\{[1 : t : t^2] : t \in \mathbb{R}\}$?

4. Determinare il tipo affine della conica $x^2 + 2\sqrt{3}xy + 3y^2 - 27y + 1 = 0$.

5. Determinare il tipo affine della quadrica $2xy + y^2 - 2xz - z^2 - 4x = 0$.

Geom 6. Calcolare gli autovalori della matrice hessiana nel punto $(0, 0)$ della funzione $f(x, y) = y^2 - \exp(x + 2 \sin y)$.

Geom 7. Si fissi una 1-forma ω chiusa su $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, -1), (0, 1)\}$.

Al variare di α curva semplice chiusa e orientata in Ω , quanti valori diversi può assumere $\int_{\alpha} \omega$?

GAII 8. Completare il vettore $3e_1 + 2e_2 - e_3$ a una base ortogonale di $\{x \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 0\}$

GAII 9. Fissata $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ descrivere tutte le matrici B tali che $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♥ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♥ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♥ 9. ♣ 10. ◇



1. Al variare di k in $\mathbb{C}$ si consideri la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 2+k & 1+k-2i \\ i(1-k) & i-2 \end{pmatrix}$.
- (A) (3 punti) Si verifichi che per $k = i$ esiste un unico $c \in \mathbb{R}$ positivo tale che $c \cdot A_k$ è unitaria.
- (B) (3 punti) Per $k = i$ si trovino gli autovalori di A_k .
- (C) (3 punti) Si dimostri che esistono valori di k per i quali A_k ha un solo autovalore di molteplicità algebrica 2. [Suggerimento: Dimostrare che esistono non significa trovarli.]
- (D) (3 punti) Si dimostri che l'unico valore di k per il quale A_k ammette una base ortonormale di autovettori è $k = i$.

Geom 2. Si consideri $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ data da $\alpha(t) = (te^t, t^2, e^{2t})$.

Geom (A) (3 punti) Si provi che α è una curva semplice che ammette ovunque retta tangente.

Geom (B) (3 punti) Si determini l'angolo tra la retta tangente ad α per $t = 0$ e il piano di equazione $x + y + z = 0$.

Geom (C) (3 punti) Si calcolino curvatura e torsione di α per $t = 0$.

Geom (D) (3 punti) Indicata con β la restrizione di α all'intervallo $[0, 1]$ si calcoli $\int_{\beta} (y \, dx + (x+z) \, dy + y \, dz)$.

GAII 3. In $X = \mathbb{R}[t]$ si consideri il sottospazio $Y = \{p(t) \in X : \deg(p(t)) \leq 3, p(-1) = 0\}$. Si definisca inoltre $f : X \rightarrow X$ come $f(p(t)) = t \cdot p'(t) + p(0) - \frac{1}{2} \cdot p''(0) + \frac{1}{3} \cdot p'''(0)$.

GAII (A) (3 punti) Si calcoli la dimensione di Y e se ne esibisca una base $\mathcal{B}$.

GAII (B) (3 punti) Si provi che f è iniettiva.

GAII (C) (2 punti) Si provi che f è in realtà invertibile.

GAII (D) (4 punti) Si provi che $f(Y) \subset Y$, si definisca $g : Y \rightarrow Y$ in modo che $g(y) = f(y)$ per ogni $y \in Y$, e si determini la matrice che rappresenta g rispetto a $\mathcal{B}$.



Risposte esatte

5. ♥

1. $\begin{pmatrix} -i \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$

2. 3 e -5 ; $\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

3. La parabola $x = y^2$ privata dell'origine

4. Parabola

5. Paraboloide iperbolico

6. $\frac{1}{2}(-3 \pm \sqrt{17})$

7. Al massimo 7

8. $e_1 - 2e_2 - e_3$ o un suo multiplo.

9. $B = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$

1. ♠ 2. ♥ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♥ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♥ 9. ♣ 10. ♦