UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria — Corso di Laurea in Ingegneria Civile, dell'Ambiente e del Territorio

Geometria — Scritto del 3/7/09 — Quesiti

Nome _____ **Cognome** _____ **Matricola** _ _ _ _ _ _

1. Posto $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 3 \end{pmatrix}$ ortonormalizzare la base (ie_1, e_2) di $\mathbb{C}^2$ rispetto a $\langle\, . \,|\, . \,\rangle_A$.

2. Trovare gli autovalori di $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$ e una base che la diagonalizzi.

3. Se $\mathbb{R}^2$ è identificato a $\{[x : y : z] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}),\ z = 1\}$,
quale luogo si ottiene intersecando $\mathbb{R}^2$ con $\{[t^2 : 1 : t] :\ t \in \mathbb{R}\}$?

4. Determinare il tipo affine della conica $x^2 - 3xy + 2y^2 - \sqrt{3}x + 11 = 0$.

5. Determinare il tipo affine della quadrica $2xy + y^2 - z^2 - 4x + 2 = 0$.

Geom **6.** Calcolare gli autovalori della matrice hessiana nel punto $(0, 0)$
della funzione $f(x, y) = y^2 + \exp(2x + \sin y)$.

Geom **7.** Si fissi una 1-forma ω chiusa su $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(-1, 0),\ (1, 0)\}$.
Al variare di γ curva semplice chiusa e orientata in A, quanti valori diversi può assumere $\int_\gamma \omega$?

GAII **8.** Completare il vettore $e_1 - 3e_2 + 2e_3$ a una base ortogonale di $\{x \in \mathbb{R}^3 :\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 0\}$

GAII **9.** Fissata $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ descrivere tutte le matrici B tali che $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Geometria — Scritto del 3/7/09 — Esercizî

1. Al variare di k in $\mathbb{C}$ si consideri la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 2+k & 1+k-2i \\ i(1-k) & i-2 \end{pmatrix}$.

(A) (3 punti) Si verifichi che per $k = i$ esiste un unico $c \in \mathbb{R}$ positivo tale che $c \cdot A_k$ è unitaria.

(B) (3 punti) Per $k = i$ si trovino gli autovalori di A_k.

(C) (3 punti) Si dimostri che esistono valori di k per i quali A_k ha un solo autovalore di molteplicità algebrica 2. [Suggerimento: Dimostrare che esistono non significa trovarli.]

(D) (3 punti) Si dimostri che l'unico valore di k per il quale A_k ammette una base ortonormale di autovettori è $k = i$.

Geom **2.** Si consideri $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ data da $\alpha(t) = (te^t, t^2, e^{2t})$.

Geom (A) (3 punti) Si provi che α è una curva semplice che ammette ovunque retta tangente.

Geom (B) (3 punti) Si determini l'angolo tra la retta tangente ad α per $t = 0$ e il piano di equazione $x + y + z = 0$.

Geom (C) (3 punti) Si calcolino curvatura e torsione di α per $t = 0$.

Geom (D) (3 punti) Indicata con β la restrizione di α all'intervallo $[0, 1]$ si calcoli $\int_\beta (y\,\mathrm{d}x + (x+z)\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}z)$.

GAII **3.** In $X = \mathbb{R}[t]$ di consideri il sottospazio $Y = \{p(t) \in X : \deg(p(t)) \leq 3,\ p(-1) = 0\}$. Si definisca inoltre $f : X \to X$ come $f(p(t)) = t \cdot p'(t) + p(0) - \frac{1}{2} \cdot p''(0) + \frac{1}{3} \cdot p'''(0)$.

GAII (A) (3 punti) Si calcoli la dimensione di y e se ne esibisca una base $\mathcal{B}$.

GAII (B) (3 punti) Si provi che f è iniettiva.

GAII (C) (2 punti) Si provi che f è in realtà invertibile.

GAII (D) (4 punti) Si provi che $f(Y) \subset Y$, si definisca $g : Y \to Y$ in modo che $g(y) = f(y)$ per ogni $y \in Y$, e si determini la matrice che rappresenta g rispetto a $\mathcal{B}$.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria. Dall'inizio della seconda ora si può usare anche un foglio manoscritto contenente enunciati e formule. Si può uscire solo in casi eccezionali. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La soluzione di ogni esercizio deve essere consecutiva su un solo foglio. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto di un esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.

Risposte esatte

5. $\diamondsuit$

1. $\begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$

2. 4 e -3; $\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

3. L'iperbole $xy = 1$

4. Iperbole

5. Iperboloide a una falda

6. $\frac{1}{2}\left(7 \pm \sqrt{17}\right)$

7. Al massimo 7

8. $e_1 - e_2 - 2e_3$ o un suo multiplo.

9. $B = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & d \end{pmatrix}$

1. $\spadesuit$ 2. $\heartsuit$ 3. $\spadesuit$ 4. $\clubsuit$ 5. $\diamondsuit$ 6. $\spadesuit$ 7. $\clubsuit$ 8. $\heartsuit$ 9. $\clubsuit$ 10. $\diamondsuit$