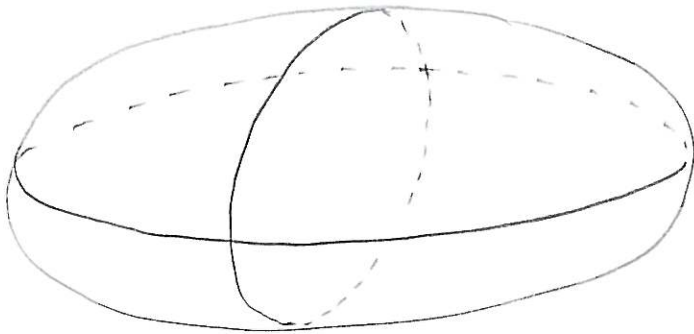


Modelli affini delle quadriche non degeneri

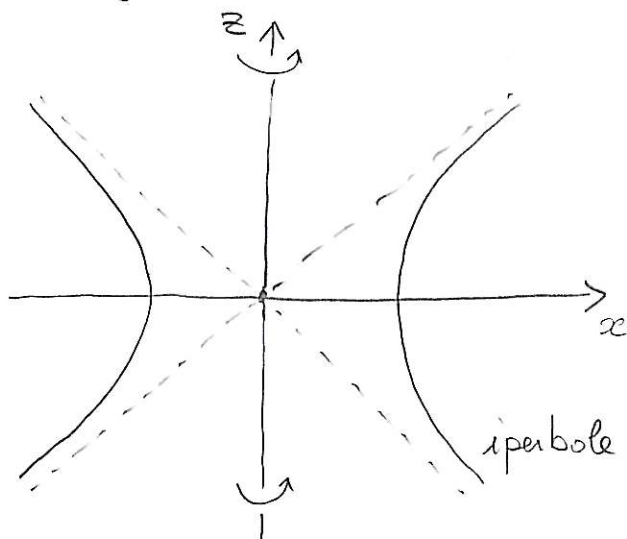
Ellissoide: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$



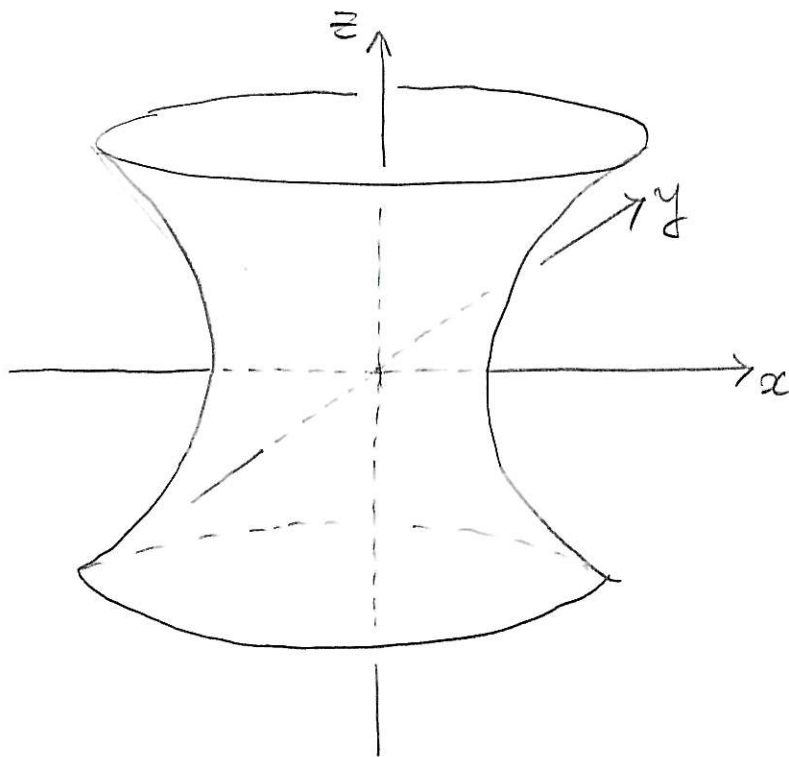
(sarebbe $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ a meno di isometrie)

Iperboloide a due fogli (iperboloide iperbolico):

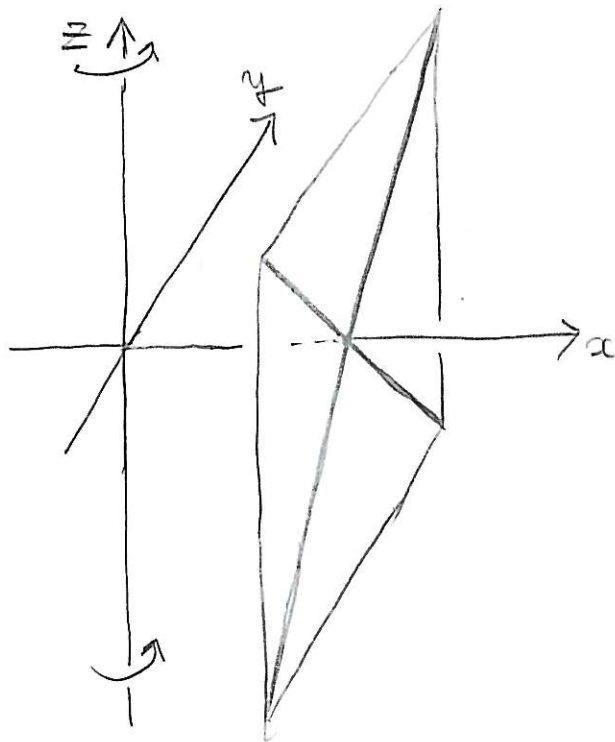
$$x^2 + y^2 = 1 + z^2$$



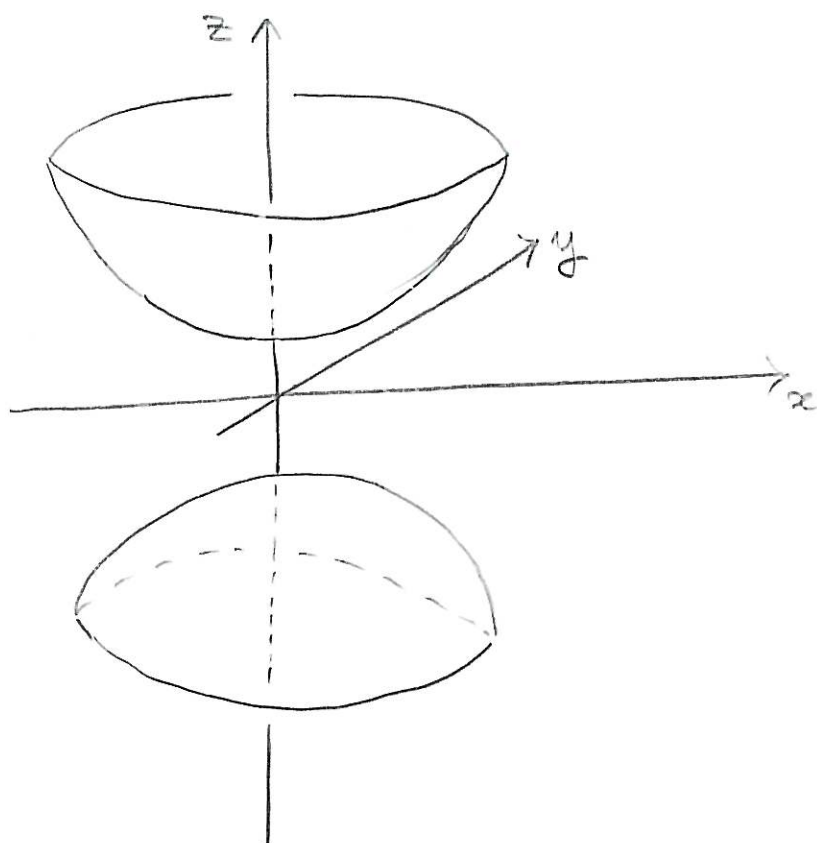
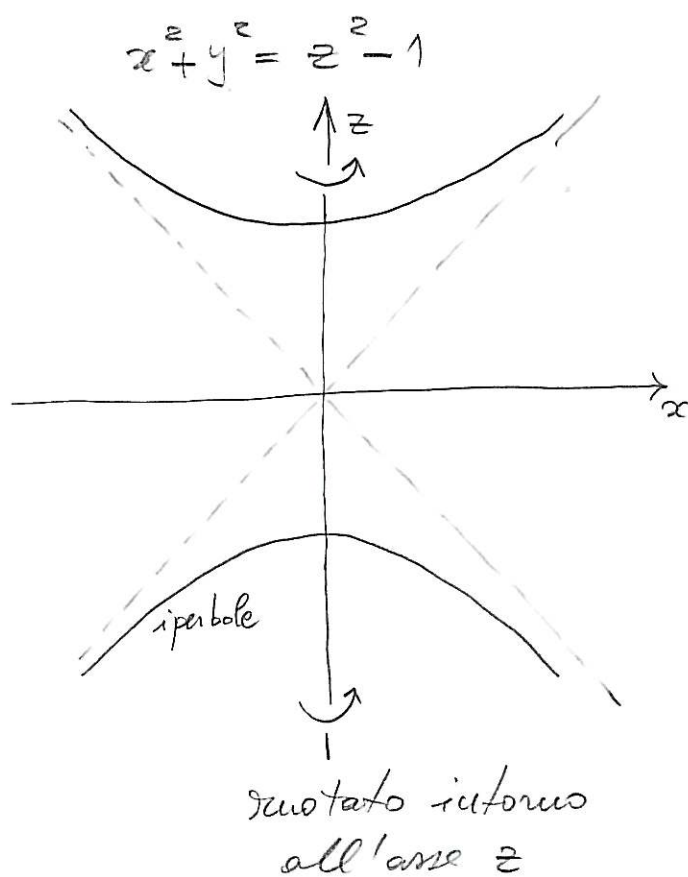
ruotato intorno
all'asse z



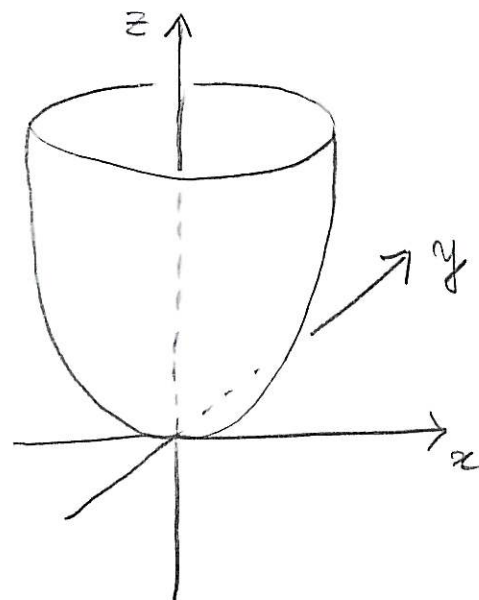
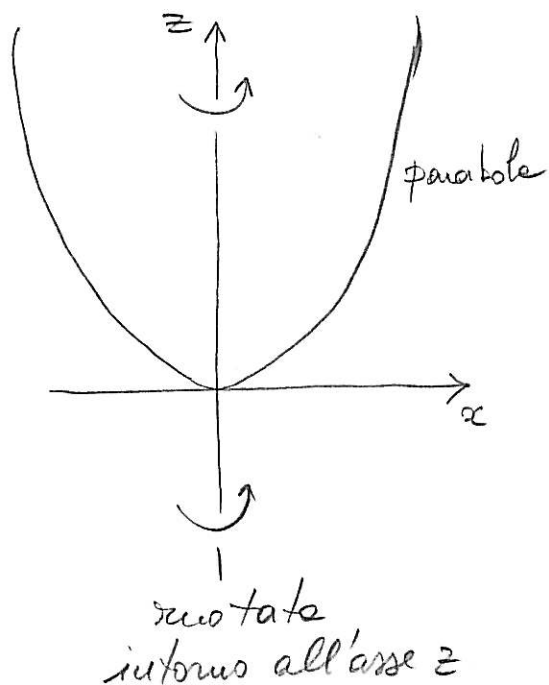
Oss : è una superficie rigata : si ottiene ruotando intorno all'asse z una qualsiasi delle rette $z = \pm y$ nel piano $x = 1$



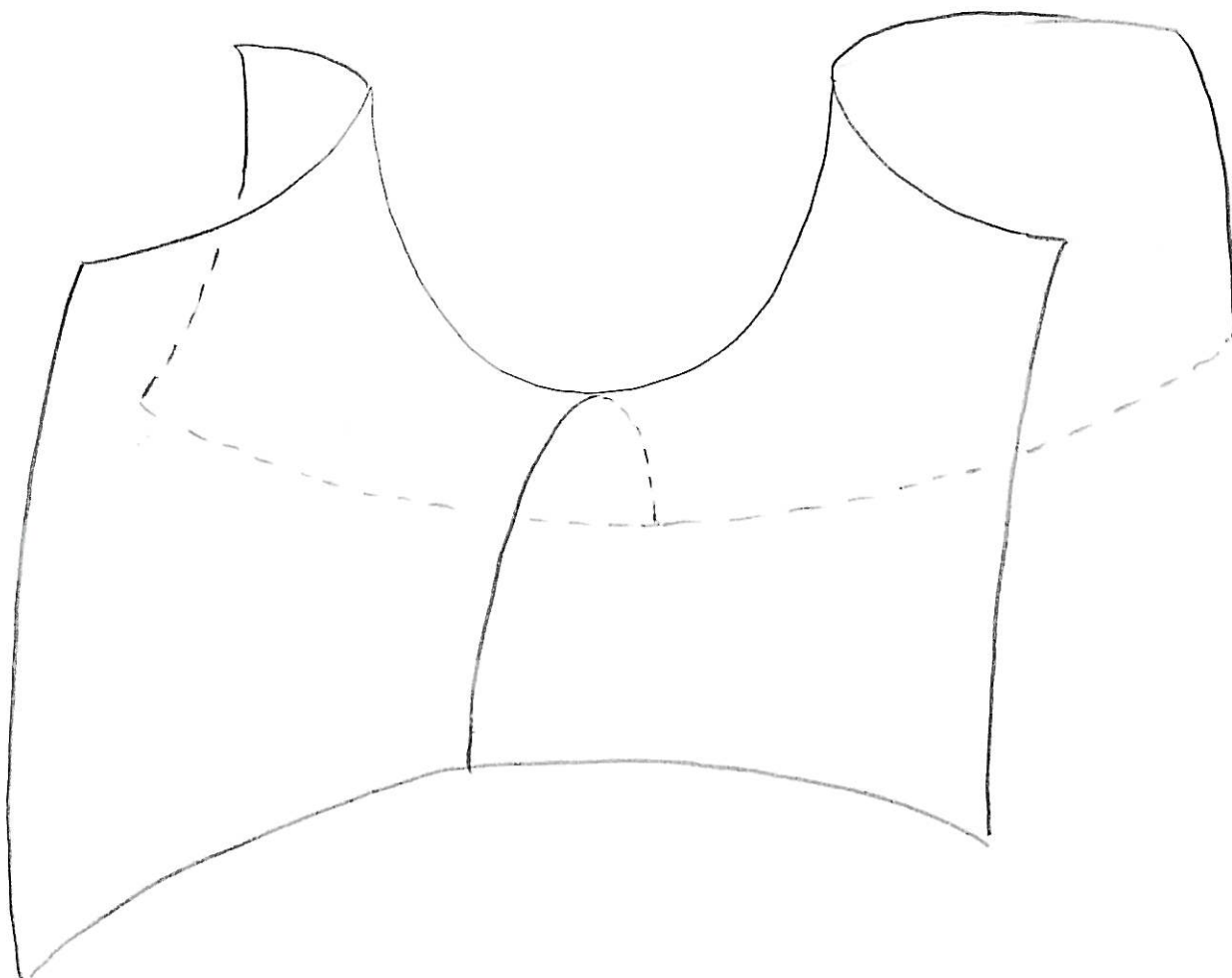
Iperboloide a due folde (iperboloide ellittico):



Paraboloidi ellittici: $z = x^2 + y^2$



Paraboloidi iperbolici (a sella): $z = x^2 - y^2$



Oss: È una superficie rigata: l'intersezione
con un piano $x+y=c$ è la retta

$$\begin{cases} x+y=c \\ z=c \cdot (x-y) \end{cases}$$

e analogamente con il piano $x-y=c$, per $c \neq 0$.

Invece per $c=0$ tali due piani si riducono
a $z=0$ che il paraboloide interseca
nelle due rette $x \pm y = 0$.

Classificazione affine delle quadriche non degeneri

Teorema: se $A \in M_{4 \times 4}(\mathbb{R})$ è simmetrica
e $\det(A) \neq 0$ allora

$$Q = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}^T \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

è affinementemente equivalente a uno dei 5
modelli di sopra o a $\emptyset = \{x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0\}$.

Dico: Scrivo $A = \begin{pmatrix} A_{\infty} & t \\ t^T & c \end{pmatrix}$ e osservo

che $\text{rank}(A_{\infty}) \geq 2$. Se no cambiando

coordinate con $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, B ortogonale, mi

riduco a $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$ che ha $\det = 0$.

Quindi divido: Caso 1: $\det(A_{\infty}) \neq 0$

Caso 2: $\text{rank}(A_{\infty}) = 2$.

Caso 1: usando $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ B ortogonale

mi riduco a $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \vdots \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$ con $\lambda_i \neq 0$.

Usando $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{|\lambda_1|} & & & \\ & 1/\sqrt{|\lambda_2|} & & \\ & & 1/\sqrt{|\lambda_3|} & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$

mi riduco a $\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 & \vdots \\ 0 & \pm 1 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \pm 1 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$.

Permutando le coordinate e cambiando
segno all'equazione mi riduco a:

Caso 1.1 : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$

Caso 1.2 : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & -1 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$

Yu entrambi i casi con $\begin{pmatrix} I & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $v = -A_\infty^{-1} l$
 mi riduco a $l = 0$, dunque $c \neq 0$. Quindi con

$\begin{pmatrix} \sqrt{|c|} & & & \\ & \sqrt{|c|} & & \\ & & \sqrt{|c|} & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ e dividendo per $|c|$ mi riduco

a $c = \pm 1$, dunque

Caso 1.1.1 $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ ϕ

Caso 1.1.2 $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$ ellissoide

Caso 1.2.1 $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ iperboloide ellittico

Caso 1.2.2 $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$ iperboloide iperbolico.

Passo al caso 2, rank $A_\infty = 2$.

Usando $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ con B ortogonale mi riduco a

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_1, \lambda_2 \neq 0$$

poi con $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{|\lambda_1|} & & & \\ & 1/\sqrt{|\lambda_2|} & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ e cambiando

segno all'equazione o scambiando x e y a

Caso 2.1 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ o Caso 2.2. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Con $\begin{pmatrix} I & \begin{smallmatrix} v_1 \\ v_2 \end{smallmatrix} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix}$ ovvero

$l_1 = l_2 = 0$, dunque mi riduco a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & a & b \end{pmatrix} \Rightarrow a \neq 0.$$

Ora con $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & k & h \\ & & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad k = -\frac{1}{2a}, \quad h = -\frac{b}{2a}$

ovvero $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \pm 1 & & \\ & & 0 & -1/2 \\ & & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$ ovvero

2.1 paraboloide ellittico 2.2 paraboloide iperbolico.

Come si riconosce il tipo affine di una quadrica non degenera? Come al solito si calcola $d_j = \det \left(\begin{smallmatrix} \text{sottomatrici } j \times j \text{ di } A \\ \text{in alto a sinistra} \end{smallmatrix} \right)$.

La distinzione tra caso 1 e caso 2 è ovvia:

Caso 1: $d_3 \neq 0$, Caso 2: $d_3 = 0$.

Nel caso 1 se $d_1 \neq 0$ e $d_2 \neq 0$ mi riconduco a

$$\begin{pmatrix} \text{sgn}(d_1) & & & \\ & \text{sgn}(d_1/d_2) & & \\ & & \text{sgn}(d_2/d_3) & \\ & & & \text{sgn}(d_3/d_4) \end{pmatrix}$$

dunque a meno di cambiare segno e permutare le coordinate ho proprio una delle equazioni canoniche. Se $d_1 = 0$ oppure $d_2 = 0$ so già di essere nel caso 1.2, dunque a meno di permutare le coordinate e cambiare segno mi riduco a $d_1 > 0$, $d_2 > 0$, $d_3 < 0$ e quindi so classificare.

Nel caso 2 se $d_2 \neq 0$ ho già la conclusione:
 se $d_2 > 0$ è il caso 2.1, se $d_2 < 0$ è il 2.2.

Se $d_1 = d_2 = 0$ ho

$$A_\infty = \begin{pmatrix} 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & \vdots \\ 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & \vdots \\ 0 & a & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

$a \neq 0$ perché rank = 2

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & \vdots \\ 0 & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & b & c \end{pmatrix}$$

perché rank = 2

$ac - b^2 \neq 0$
perché rank = 2

$\Rightarrow$ permutando le coordinate ho un $d_2 \neq 0$.

Resta il caso $d_1 \neq 0$ e tutti i d_2 , anche
 permutando, nulli; ma questo è impossibile:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & \vdots & \vdots \\ c & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & b^2/a & \vdots \\ c & \vdots & c^2/a \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & b^2/a & bc/a \\ c & bc/a & c^2/a \end{pmatrix}$$

(usando $d_2(xy) = 0$
e $d_2(xz) = 0$)

(usando
 $d_2(yz) = 0$)

e questo ha rango 1.



Per esaminare la parte all' ∞ delle quadriche classifico le coniche proiettive (a meno di cambi di coordinate proiettive):

Diagonalizzando, dividendo per $i \sqrt{|a_{ij}|}$ quando non nulli, cambiando segno e permutando trovo soltanto:

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \quad \emptyset$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \quad \text{non deg} \quad \left(\begin{array}{l} \text{a seconda di dove metto} \\ \text{le rette all}'\infty \text{ ritrovo} \\ \text{ellisse, parabola, iperbole} \end{array} \right)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \quad \text{un punto}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \quad \text{due rette incidenti} \quad \left(\begin{array}{l} \text{a seconda di} \\ \text{dove metto } \infty \\ \text{possono essere} \\ \text{parallele in } \mathbb{R}^2 \end{array} \right)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \quad \text{una retta}$$

Dunque:

Ellissoide: $\emptyset$ a ∞

Iperboloidi: non deg a ∞

Paraboloido ellittico : un punto a ∞

Paraboloido iperbolico : due rette a ∞ .

Giustamente non trova una retta, che
corrisponde al caso $\text{rank}(A_\infty) = 1$.