Classificazione affine delle quadriche non degeneri

Per i corsi di “Geometria e Algebra II” e
“Geometria”, Ingegneria Civile,
Prof. Carlo Petronio

19 gennaio 2009

Chiamiamo quadrica un sottoinsieme $\mathcal{Q}$ di $\mathbb{R}^3$ definito da un’equazione polinomiale di secondo grado nelle coordinate x. Associamo a $\mathcal{Q}$ una matrice 4×4 simmetrica A per la quale l’equazione si scrive come

$$\begin{pmatrix} {}^{\mathrm{t}}x & 1 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Diciamo che $\mathcal{Q}$ è non degenere se $\det(A) \neq 0$. Siamo interessati alla classificazione delle quadriche non degeneri a meno di automorfismi affini di $\mathbb{R}^3$. A questo scopo definiamo A_∞ come la matrice formata dalle prime tre righe e colonne di A e indichiamo con (s_1, s_2, s_3, s_4) i segni degli autovalori di A e con $(s_1^\infty, s_2^\infty, s_3^\infty)$ i segni degli autovalori di A_∞. Il segno di un numero reale è $+/-/0$. Per $j = 1, \ldots, 4$ definiamo inoltre d_j come il determinante della matrice formata dalle prime j righe e colonne di A. Valgono i fatti seguenti:

- Il tipo affine di $\mathcal{Q}$ è determinato da $(s_1^\infty, s_2^\infty, s_3^\infty)$ e (s_1, s_2, s_3, s_4);
- Cambiando simultaneamente tutti gli s_j^∞ e s_j il tipo affine non cambia;
- Dato che $\mathcal{Q}$ è non degenere, gli s_j sono tutti non nulli e al più uno degli s_j^∞ è nullo;
- Se i d_j sono tutti non nulli, gli s_j^∞ sono i segni di $d_1,\ d_1/d_2,\ d_2/d_3$ e gli s_j sono i segni di $d_1,\ d_1/d_2,\ d_2/d_3,\ d_3/d_4$;

- Se $d_3 = 0$ a meno di permutare le coordinate si ha $d_2 \neq 0$ e il suo segno è già sufficiente a determinare il tipo affine di $\mathcal{Q}$.

Grazie a questi fatti le possibilità distinte da esaminare sono solo quelle nella seguente tabella, che fornisce la classificazione (esibendo per ciascuno dei tipi affini la cosiddetta *equazione canonica*):

(d_1, d_2, d_3, d_4)	$(s_1^\infty, s_2^\infty, s_3^\infty)$ (s_1, s_2, s_3, s_4)	A	Equazione	$\mathcal{Q}$
$(+,+,+,+)$	$(+,+,+)$ $(+,+,+,+)$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 1 = 0$	$\emptyset$
$(+,+,+,-)$	$(+,+,+)$ $(+,+,+,-)$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$	Ellissoide
$(+,+,-,+)$	$(+,+,-)$ $(+,+,-,-)$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$x_1^2 + x_2^2 = 1 + x_3^2$	Iperboloide a una falda
$(+,+,-,-)$	$(+,+,-)$ $(+,+,-,+)$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$x_3^2 = 1 + x_1^2 + x_2^2$	Iperboloide a due falde
$(*,+,0,*)$	$(+,+,0)$ $(+,+,-,+)$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$	$x_3 = x_1^2 + x_2^2$	Paraboloide ellittico
$(*,-,0,*)$	$(+,-,0)$ $(+,-,+,-)$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$	$x_3 = x_1^2 - x_2^2$	Paraboloide iperbolico