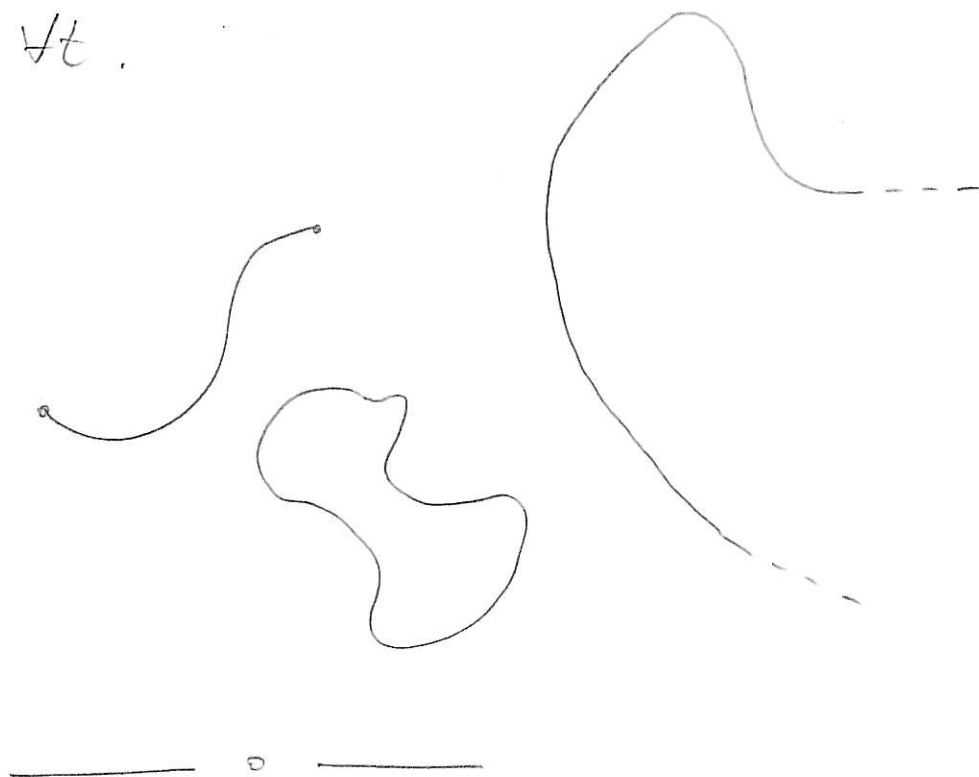


Oss: l'immagine di una curva semplice  $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  è localmente grafico di una coordinata in funzione dell'altra.

Vicino a  $\alpha(t_0)$ , posso scrivere  $y = f(x)$  se  $X'(t_0) \neq 0$ , e  $x = g(y)$  se  $Y'(t_0) \neq 0$ .

Possiamo ora dare la definizione intrinseca di curva:  $C \subset \mathbb{R}^2$  è curva se è localmente parametrizzabile con  $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\|\alpha'(t)\| \neq 0 \forall t$ .

Esempio:



Le coniche sono curve definite come luoghi di zeri di funzioni. In generale un luogo di zeri può non essere una curva, ma:

Teo (Diri):  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  aperto,  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \in C^1$ ,  
 $C_1 = \{(x,y) \in \Omega : f(x,y) = 0\}$ ,  $\text{grad}(f) \neq 0$   
 su  $\Omega \Rightarrow C_1$  curva e nel punto  $(x,y)$   
 la retta tangente è l'ortogonale a  $\text{grad}_{(x,y)}(f)$ .

Idea:  $C_1$  è la curva di livello 0 di  $f$ ,  
 dunque è ortogonale alla direzione  $\text{grad}(f)$   
 di massima crescita di  $f$ .

---

Se  $\alpha: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  è una curva,  
 possiamo supporre  $\|\alpha'\| \equiv 1$ . Sappiamo che  
 in  $\alpha(t_0)$  la tangente  $\alpha(t_0) + \mathbb{R} \cdot \alpha'(t_0) = \pi$   
 ha contatto (almeno) duplice con  $\alpha$ , cioè  
 $\text{dist}(\alpha(t), \pi)$  è nullo al primo ordine  
 in  $t_0$ . Poiché una circonferenza passa  
 per tre punti (se non allineati), possiamo  
 chiedere a una circonferenza  $C_1$  di avere  
 contatto (almeno) triplo, cioè  
 $\text{dist}(\alpha(t), C_1)$  nullo al secondo ordine in  $t_0$ .

Prop: se  $\alpha''(t_0) \neq 0$  esiste un'unica circonferenza (detta osculatrice) con contatto triplo, con centro nella direzione di  $\alpha''(t_0)$  e raggio  $1/\|\alpha''(t_0)\|$ .

Oss: la circonferenza osculatrice ha la stessa retta tangente di  $\alpha$  in  $\alpha(t_0)$ , ovvero  $\langle \alpha'(t_0) | \alpha''(t_0) \rangle = 0$ , come si vede derivando  $\|\alpha'(t)\|^2 \equiv 1$ .

Per una circonferenza di raggio  $R$  il numero  $1/R$  misura quanto essa è curva, dunque diciamo  $K(t) = \|\alpha''(t)\|$  curvatura di  $\alpha$  in  $\alpha(t)$ . In realtà se  $\alpha$  è orientata possiamo darne una versione con segno:

$$K(t) = + \|\alpha''(t)\| \text{ se } \det(\alpha'(t), \alpha''(t)) > 0$$

$$K(t) = - \dots \dots \dots < 0$$

Oss:  $\alpha$  è una retta se e solo se  $K(t) \equiv 0$

Oss: se  $K(t) = 0$  in un punto il cerchio osculatore degenera nella retta tangente (il raggio diventa  $+\infty$ ).

Spesso ottenere il p.d'a. è difficile, dunque è utile la:

Prop: per  $\alpha$  non in p.d'a. si ha

$$K(t) = \frac{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3}$$

(dove  $\wedge$  è calcolato pensando  $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^3 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$ ).

— • —

Per una curva  $\alpha: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  in p.d'a. definiamo il referimento di Frénet (quando è possibile):

$$\begin{aligned} t(u) &= \alpha'(u) && \text{vettore tangente} \\ n(u) &= \frac{\alpha''(u)}{\|\alpha''(u)\|} && \text{vettore normale} \\ b(u) &= t(u) \wedge n(u) && \text{vettore binormale} \end{aligned}$$

Oss:  $(t, m, b)$  è sempre una base ortonormale positiva.

Il risultato sulle circonferenze osculatrici vale ancora, e dice in questo caso anche che esso giace sul piano  $\text{Span}(x', x'') = \text{Span}(t, m)$  detto piano osculatore.

Quindi si pone ancora  $K = \|x''\|$ , curvatura (senza segno).

Prop:  $\exists \tau = \tau(u)$  t.c.

$$\begin{cases} t' = K \cdot m \\ m' = \tau \cdot b - K \cdot t \\ b' = -\tau \cdot m \end{cases}$$

ovvero 
$$\begin{pmatrix} t' \\ m' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & K & 0 \\ -K & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ m \\ b \end{pmatrix}.$$

Poiché  $b'$  misura le variazioni del piano osculatore, chiamiamo  $\tau$  Torsione. In particolare  $\alpha$  è piano se e solo se  $\tau \equiv 0$ .

Dimo: 
$$b' = (t \wedge m)' = t' \wedge m + t \wedge m' \\ = K \cdot m \wedge m + t \wedge m' = t \wedge m'$$

è ortogonale a  $t$ , e anche a  $b$  dato che  $\|b'\| \equiv 1$ , dunque  $b' \parallel m$ .

$$\begin{aligned}
 \gamma_{\text{molte}} \quad m' &= (bat)' = b'at + ba't' \\
 &= -\tau \cdot mat + b\lambda(K \cdot m) \\
 &= -\tau \cdot (-b) + K \cdot (-t) \\
 &= \tau \cdot b - K \cdot t.
 \end{aligned}$$



Prop: se  $\alpha$  non è in p.d'a. allora

$$\tau = \frac{\langle \alpha' \wedge \alpha'' \mid \alpha''' \rangle}{\|\alpha' \wedge \alpha''\|^2}$$

(e  $K = \frac{\|\alpha' \wedge \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3}$  come sopra)

\_\_\_\_\_ o \_\_\_\_\_

## Integrali su curve

Se  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  è aperto,  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

e  $\alpha: [a, b] \rightarrow \Omega$  poniamo

$$\int_{\alpha} f = \int_a^b f(\alpha(t)) \cdot \|\alpha'(t)\| dt$$

Oss: non dipende dalla parametrizzazione di  $\alpha$  (neppure cambiando orientazione).

Se  $f, g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  definiamo

$$\omega = f \cdot dx + g \cdot dy$$

1-forma su  $\Omega$ , e definiamo

$$\int_{\alpha} \omega = \int_a^b [f(\alpha(t)) \cdot X'(t) + g(\alpha(t)) \cdot Y'(t)] dt$$

(dove  $\alpha = (X, Y)$ ).

Qss: non dipende dalla parametrizzazione  
per  $\alpha$  orientata, ma cambia segno cambiando  
orientazione.

Data  $P: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  poniamo

$$dP = \frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy$$

(differenziale di  $P$ )

$$\begin{aligned} \text{Notiamo che } \int_{\alpha} dP &= \int_a^b \left[ \frac{\partial P}{\partial x}(X(t), Y(t)) X'(t) \right. \\ &+ \left. \frac{\partial P}{\partial y}(X(t), Y(t)) Y'(t) \right] dt = \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt} (P(X(t), Y(t))) dt = \end{aligned}$$

$$= \mathbb{P}(\alpha(t)) \Big|_a^b = \mathbb{P}(\alpha(b)) - \mathbb{P}(\alpha(a))$$

dunque dipende solo dagli estremi di  $\alpha$   
e non da  $\alpha$ . In particolare

$$\int_{\alpha} d\mathbb{P} = 0 \quad \forall \alpha: [a,b] \rightarrow \Omega \text{ chiusa.}$$

Diciamo  $\alpha = f \cdot dx + g \cdot dy$  esatta su  $\Omega$   
se ammette un potenziale  $\mathbb{P}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  
cioè  $f = \frac{\partial \mathbb{P}}{\partial x}$ ,  $g = \frac{\partial \mathbb{P}}{\partial y}$  su  $\Omega$ .

Come verificare se  $\omega$  è esatta? Per  $\mathbb{P} \in C^2$   
abbiamo  $\frac{\partial^2 \mathbb{P}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \mathbb{P}}{\partial y \partial x}$ , dunque è  
necessario che  $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$ ; in tal caso  
diciamo  $\omega$  chiusa.

Obs:  $\omega = \frac{y dx - x dy}{x^2 + y^2}$  è chiusa su  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

(facile calcolo, oppure notare che



$$\omega = d \left( \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \right) = d \left( \operatorname{arccotg} \frac{x}{y} \right)$$

funzioni non definite  
su tutto  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ,  
dunque non sono  
potenziali

almeno una delle  
due funzioni è  
sempre definita, dunque  
uno dei due ha senso,  
e basta per dire che è  
chiusa poiché  $\left( \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \right)$

ma non è esatta, poiché se

$$\alpha(t) = (\cos t, \sin t) \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

allora  $\alpha$  è chiusa ma

$$\int_{\alpha} \omega = \int_0^{2\pi} 1 \cdot dt = 2\pi$$

(infatti  $\operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \operatorname{arccotg} \frac{x}{y} = \vartheta$ , dunque

$$\int_{\alpha} \omega = \int_{\alpha} d\vartheta = 2\pi).$$

Per una  $\omega$  1-forma qualsiasi definiamo  
 se  $\omega = f dx + g dy$

$$d\omega = \left( \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx dy$$

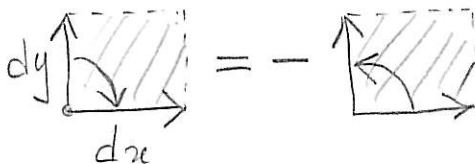
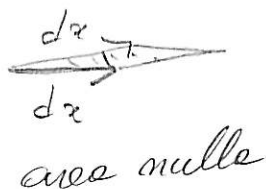
elemento d'area orientato.

Idea :  $d(dx) = d(dy) = 0$

$$\Rightarrow d\omega = (df) \cdot (dx) + (dg) \cdot (dy)$$

$$= \left( \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \right) dx + \left( \frac{\partial g}{\partial x} dx + \frac{\partial g}{\partial y} dy \right) dy$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x} dx dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy dx + \frac{\partial g}{\partial x} dx dy + \frac{\partial g}{\partial y} dy dy$$



area  
nulla

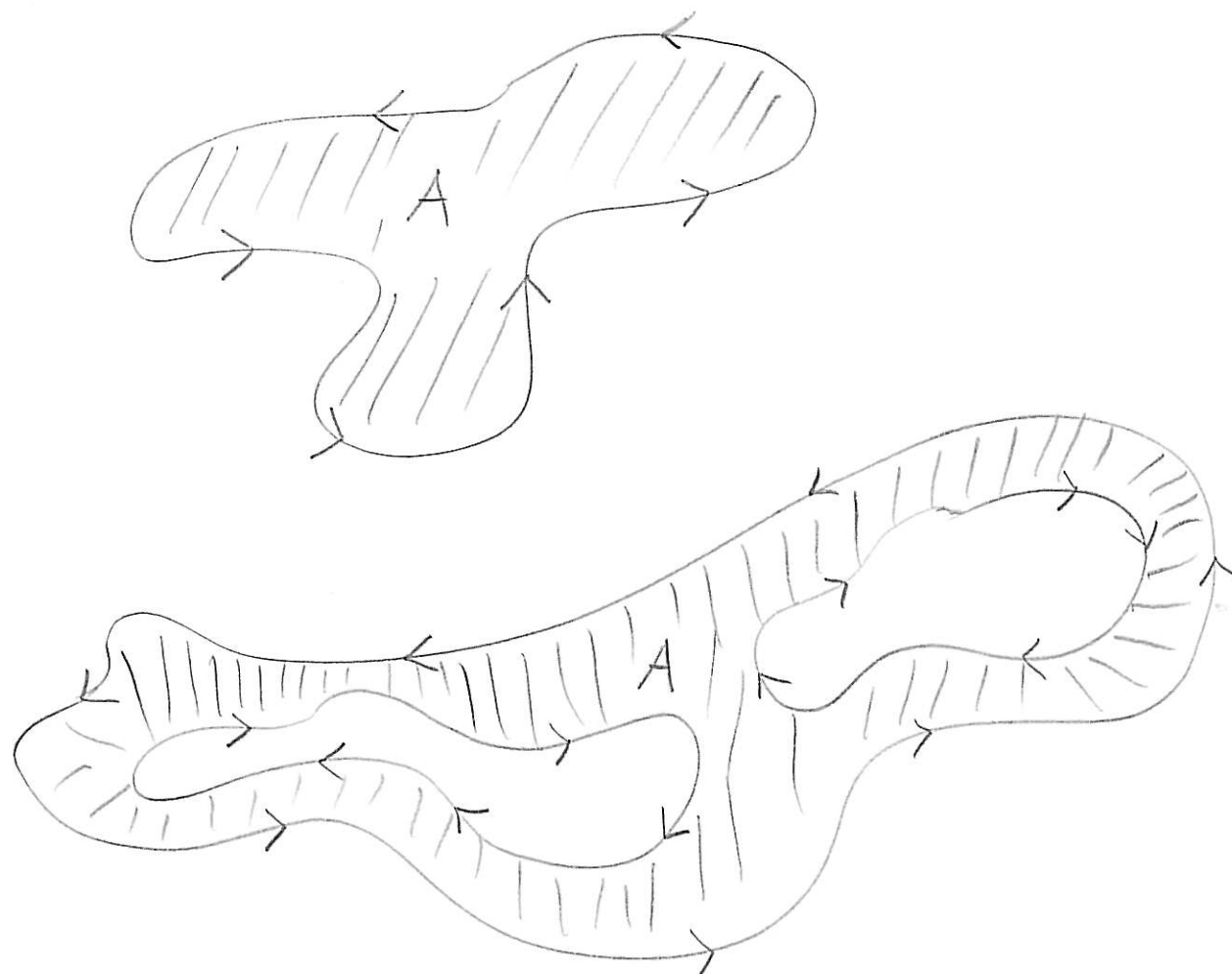
Oss : se  $\alpha: [a, b] \rightarrow \Omega$  e convergiamo

$\partial\alpha = \alpha(b) - \alpha(a)$  allora possiamo scrivere

$$\int_{\alpha} dP = P(\alpha(b)) - P(\alpha(a))$$

Come 
$$\int_{\alpha} dP = \int_{\partial\alpha} P.$$

Analogamente per  $A \subset \mathbb{R}^2$  aperto limitato  
il suo bordo  $\partial A$  (se tutto va bene) una  
curva, che orientiamo in modo  
che lo lasci a sinistra:



Thm (Gauss-Green): se  $\omega$  è una 1-forma definita su  $A$  e anche oltre  $\partial A$  allora

$$\int_{\partial A} \omega = \int_A d\omega$$

Diamo (solo per rettangoli):  $A = [a, b] \times [c, d]$

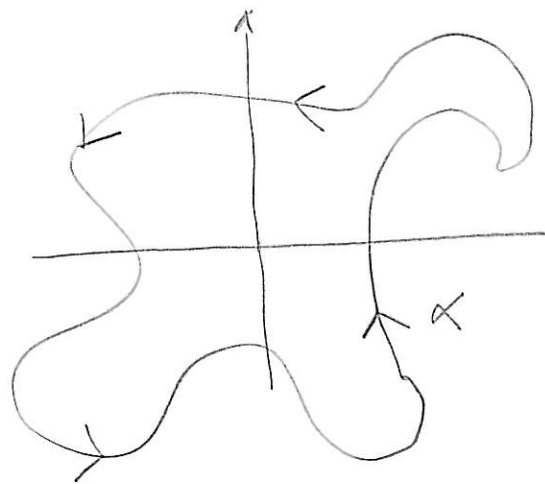
$$\int_{\partial A} f dx + g dy = \int_a^b f(t, c) dt + \int_c^d g(b, t) dt - \int_a^b f(t, d) dt - \int_c^d g(a, t) dt$$

$$\int_A \left( \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx dy = \int_c^d \left( \int_a^b \frac{\partial g}{\partial x} dx \right) dy - \int_a^b \left( \int_c^d \frac{\partial f}{\partial y} dy \right) dx$$

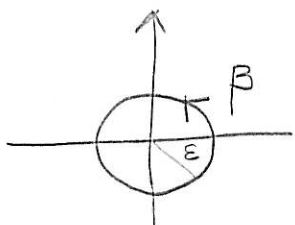
$$= \int_c^d \left( g \Big|_{x=a}^{x=b} \right) dy - \int_a^b \left( f \Big|_{y=c}^{y=d} \right) dx$$

$$= \int_c^d g(b, y) dy - \int_c^d g(a, y) dy - \int_a^b f(x, d) dx + \int_a^b f(x, c) dx. \quad \square$$

Esempio:  $\omega = \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2}$ ,



$$\Rightarrow \int_{\alpha} \omega = 2\pi$$

infatti se  esiste A su

cui è definite  $\omega$  t.c.  $\partial A = \alpha - \beta$

$$\Rightarrow \int_{\alpha} \omega - \int_{\beta} \omega = \int_{\alpha - \beta} \omega = \int_{\partial A} \omega = \int_A d\omega = \int_A 0 = 0$$

Esempio:  $\int_{\partial A} x dy = - \int_{\partial A} y dx = \text{area}(A).$

Esempio:  $d\omega = 0$  su  $\Omega$

$$\Rightarrow \int_{\partial A} \omega = 0 \quad \forall A \subset \Omega$$

Abbiamo visto per  $\omega$  1-forma su  $\Omega$

$$\begin{array}{ccc} \text{esatta} & \Rightarrow & \text{chiusa} \\ (\omega = dP) & & (d\omega = 0) \end{array}$$

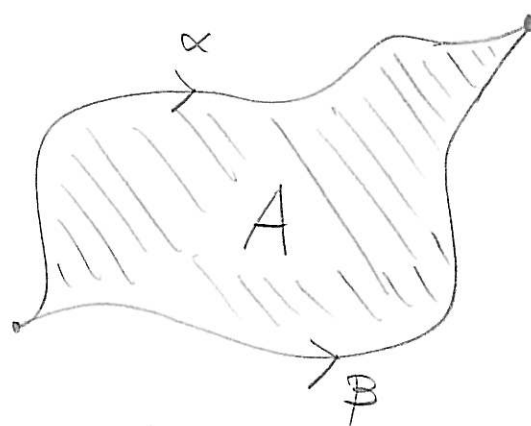
Il viceversa vale per  $\Omega$  semplicemente connesso:  
(senza buchi):  $\forall \alpha \in \Omega$  curva semplice  
chiusa e'  $\alpha = \partial A$  con  $A \subset \Omega$ .



Prop:  $\omega$  chiusa su  $\Omega$  semplicemente connesso  
 $\Rightarrow \omega$  esatta.

Dimo: Noto che  $\int \omega$  dipende solo dagli estremi di  $\alpha$ ,  
 infatti  $\partial\alpha = \partial\beta \stackrel{\alpha}{\Rightarrow}$

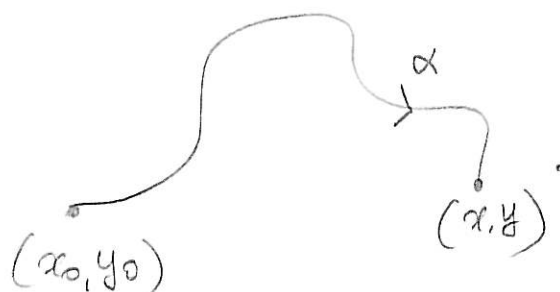
$$\alpha - \beta = \partial A$$



$$\Rightarrow \int_{\alpha} \omega - \int_{\beta} \omega = \int_{\partial A} \omega = \int_A d\omega = \int_A 0 = 0.$$

One fisso  $(x_0, y_0) \in \Sigma$  e posto

$$P(x, y) = \int_{\alpha} \omega \quad \text{dove}$$



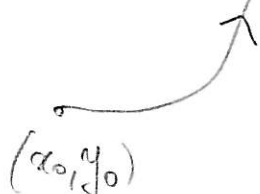
(Posso farlo solo per quanto sopra.) Allora

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x, y) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (P(x+t, y) - P(x, y)) =$$

$(x+t, y)$

$(x, y)$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_0^t f(x+s, y) ds = f(x, y)$$



e analogamente  $\frac{\partial P}{\partial y} = g.$

