

Curve

Una curva (liscia, parametrizzata) in $\mathbb{R}^n$ è una $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ di classe C^1 con $\alpha'(t) \neq 0 \ \forall t$. "Parametrizzata" perché poi vedremo una versione intuitiva della definizione, come sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$. "Liscia" perché chiedendo $\alpha'(t) \neq 0 \ \forall t$ si ha ovunque una retta tangente:

Prop: Nel punto $\alpha(t_0)$ l'unica retta che ha con α un contatto di ordine almeno 1 è quella in direzione $\alpha'(t_0)$.

Dimo: Se $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ e $\pi: ax+by+c=0$ posso sempre scegliere c in modo che π contenga $\alpha(t_0)$; voglio che in t_0 si annulli la derivata di

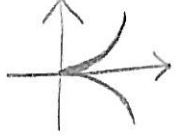
$$\text{dist}(\alpha(t), \pi) = \frac{|ax(t)+by(t)+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Scontando le costanti e ricordando che
 $|y| = \sqrt{y^2}$ ho la derivata

$$\left(\sqrt{(ax(t)+by(t)+c)^2} \right)' = \frac{1}{2} \frac{(ax+by+c)}{|ax+by+c|} \cdot (ax'+by')$$

dunque bisogna che $ax'(t_0)+by'(t_0)=0$, cioè
 che la direzione di α sia

$$\alpha'(t_0) = \begin{pmatrix} x'(t_0) \\ y'(t_0) \end{pmatrix}. \quad \square$$

Qss: $\alpha(t) = (t^2, t^3)$  non è liscia in 0, infatti $\alpha'(0)=0$.

Data $\alpha: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ posso prendere una
 suddivisione $a=t_0 < t_1 < \dots < t_N=b$ di $[a,b]$
 e approssimare l'immagine di α con le
 spezzate di vertici $\alpha(t_0), \alpha(t_1), \dots, \alpha(t_N)$.

Dato che

$$\alpha(t_j) = \alpha(t_{j-1}) + (t_j - t_{j-1}) \cdot \alpha'(t_{j-1}) + o(\|t_j - t_{j-1}\|)$$

le spezzate ha lunghezza

$$\sum_{j=1}^N \|\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1})\| \approx \sum_{j=1}^N (t_j - t_{j-1}) \cdot \|\alpha'(t_{j-1})\|$$

dunque è ragionevole porre

$$L(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt \quad \text{lunghezza di } \alpha.$$

Se $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ è una curva e
 $\tau: [c, d] \rightarrow [a, b]$ è una biezione C^1
con inversa C^1 dico che $\beta = \alpha \circ \tau$
(cioè $\beta(s) = \alpha(\tau(s))$) è ottenuta da α
con il cambiamento di parametro τ .

Nota che $\tau'(s) \neq 0$ in effetti se $\sigma = \tau^{-1}$
ho $\sigma'(t) = \frac{1}{\tau'(\sigma(t))}$ e ho supposto τ^{-1}

di classe C^1 . Inoltre τ può essere
crescente (se $\tau' > 0$) o decrescente (se $\tau' < 0$);
nel primo caso dico che conserva l'orientazione
di α , nel secondo che la inverte.

Prop: la lunghezza di una curva non
dipende dalle parametrizzazioni.

Dimo: se $\beta = \alpha \circ \tau$ ho

$$\beta'(s) = \alpha'(\tau(s)) \cdot \tau'(s) \quad (\text{derivazione funzione composta})$$

$$\Rightarrow \int_c^d \|\beta'(s)\| ds = \int_c^d \|\alpha'(\tau(s))\| \cdot |\tau'(s)| ds$$
$$= \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt \quad (\text{cambiamento di variabile nell'integrale}). \quad \square$$

Diciamo che α è parametrizzata in parametro d'arco se $\|\alpha'(t)\| = 1 \quad \forall t$, dunque se la lunghezza dell'arco di α tra $\alpha(t_0)$ e $\alpha(t_1)$ è $|t_1 - t_0|$ per ogni t_0 e t_1 .

È sempre possibile riparametrizzare in parametro d'arco:

Prop: se $\sigma: [a, b] \rightarrow [0, L]$ è data da $\sigma(t) = \int_a^t \|\alpha'(u)\| du$ e $\tau = \sigma^{-1}$ allora $\beta = \alpha \circ \tau$ è in parametro d'arco.

Dimo: $\sigma'(t) = \|\alpha'(t)\|$

$$\Rightarrow \tau'(s) = \frac{1}{\|\alpha'(\tau(s))\|}$$

$$\Rightarrow \beta'(s) = (\alpha \circ \tau)'(s) \\ = \alpha'(\tau(s)) \cdot \tau'(s) = \frac{\alpha'(\tau(s))}{\|\alpha'(\tau(s))\|} \quad \square$$

Diciamo che α è semplice se è iniettiva, chiusa se $\alpha(b) = \alpha(a)$, semplice e chiusa se è chiusa e iniettiva su $[a, b)$.

Un fatto intuitivo ma difficile è:

Teo (Jordan): α semplice e chiusa in $\mathbb{R}^2$ lo separa in due regioni connesse, una limitata e una no.

(Per $A \subset \mathbb{R}^2$ aperto, "connesso" significa che $\forall x_0, x_1 \in A \quad \exists \gamma: [0, 1] \rightarrow A$ continua t.c. $\gamma(0) = x_0$ e $\gamma(1) = x_1$.)