

Coordinate omogenee, equazioni, sottospazi proiettivi

Rappresentiamo le classi di equivalenza in $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ di un punto $(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ con $[x_1 : x_2 : \dots : x_n : x_{n+1}]$, osservando che se $\lambda \neq 0$ $[\lambda x_1 : \lambda x_2 : \dots : \lambda x_n : \lambda x_{n+1}]$ rappresenta lo stesso punto di $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$.

Se $p(x) \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_{n+1}]$ è omogeneo di grado d abbiamo $p(\lambda x) = \lambda^d p(x)$, dunque le equazioni $p(x) = 0$ e $p(\lambda x) = 0$ sono equivalenti, perciò $\{[x] \in \mathbb{P}^n : p(x) = 0\}$ è un luogo ben definito in $\mathbb{P}^n$.

In particolare se $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ sono funzioni lineari omogenee a valori in $\mathbb{R}$ ha senso considerare $\{[x] \in \mathbb{P}^n : \alpha_1(x) = \dots = \alpha_k(x) = 0\}$, che chiamiamo sottospazio proiettivo di $\mathbb{P}^n$.

Se $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ sono lin. indep. diciamo che ha dimensione $n-k$.

Cambi di coordinate

In $\mathbb{R}^m$ come spazio vettoriale i cambi di coordinate naturali sono quelli lineari,
 $x' = B \cdot x$ con $B \in M_{m \times m}(\mathbb{R})$, $\det(B) \neq 0$.

Analogamente in $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ sono $[x'] = [M \cdot x]$
con $M \in M_{(n+1) \times (n+1)}(\mathbb{R})$, $\det(M) \neq 0$.

Notiamo che M e $\lambda \cdot M$ con $\lambda \neq 0$ danno lo stesso cambio di coordinate.

Ricordando che $\mathbb{R}^m \subset \mathbb{P}^m(\mathbb{R})$ visto come $\mathbb{R}^m = \{[x] \in \mathbb{P}^n : x_{n+1} = 1\}$ e

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \setminus \mathbb{R}^m = \{[x] \in \mathbb{P}^n : x_{n+1} = 0\} \cong \mathbb{P}^{n-1}$$

e la sua parte all'infinito, possiamo esaminare i cambi di coordinate in $\mathbb{P}^n$ che mandano $\mathbb{R}^m$ in sé e l'infinito in sé:

$$M = \begin{pmatrix} B & v \\ w & k \end{pmatrix}, \quad M \cdot \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ 0 \end{pmatrix} \quad \forall x \in \mathbb{R}^m$$

$$\Rightarrow \langle w | x \rangle = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^m \Rightarrow w = 0.$$

A meno di dividere per k abbiamo $k=1$,
dunque $M = \begin{pmatrix} B & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ con $\det B \neq 0$, perciò

$$M \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Bx + v \\ 1 \end{pmatrix},$$

cioè i cambi di coordinate naturali per $\mathbb{R}^n$
 visto come sottospazio di $\mathbb{P}^n$ sono quelli
affini: $x' = B \cdot x + v$, $B \in M_{n \times n}$, $\det(B) \neq 0$,
 $v \in \mathbb{R}^n$.

Equazioni di secondo grado

Prop: (1) un'equazione di secondo grado
 omogenea in $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ si scrive come

$${}^t x \cdot A \cdot x = 0 \quad \text{con } A \in M_{(n+1) \times (n+1)} \text{ simmetrica}$$

(2) un'equazione di secondo grado in $x \in \mathbb{R}^n$
 si scrive come ${}^t \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ con

A come sopra.

Dimo: (1) l'equazione è del tipo

$$\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \alpha_{ij} x_i x_j = 0 \quad \text{e basta porre}$$

$$a_{ii} = \alpha_{ii}, \quad a_{ij} = \alpha_{ij}/2 \quad \text{per } i < j$$

$$a_{ij} = a_{ji} \quad \text{per } i > j.$$

(2) moltiplicando per x_{n+1} i termini di
 primo grado e per x_{n+1}^2 il termine noto

si trova un'equazione omogenea in $x \in \mathbb{R}^{n+1}$,
da cui quella originale si ricava ponendo
 $x_{n+1} = 1$. $\square$

Se nel punto (2) scriviamo $A = \begin{pmatrix} Q & l \\ t_l & c \end{pmatrix}$
abbiamo che Q rappresenta la parte quadratiche
dell'equazione, l quella lineare, c il termine noto.

Al luogo $\mathcal{L}$ di equazione ${}^t \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

in $\mathbb{P}^n$ allora associamo il suo

complemento proiettivo $\overline{\mathcal{L}} = \{[x] \in \mathbb{P}^n : {}^t_x A x = 0\}$

e la sua parte all'infinito

$$\mathcal{L}_\infty = \overline{\mathcal{L}} \setminus \mathcal{L} = \{x \in \mathbb{P}^{n-1} : {}^t_x Q \cdot x = 0\}.$$

Vorremo classificare i luoghi $\mathcal{L}$

(limitatamente a quelli con $\det(A) \neq 0$)

a meno di cambiamenti di coordinate affini.

Osserviamo come cambia la matrice:

$$\begin{aligned} & {}^t \left(\begin{pmatrix} B & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} Q & l \\ t_l & 1 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} B & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= {}^t \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} {}^t B & 0 \\ t_v & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Q & l \\ t_l & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= {}^t \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} {}^t B Q B & * \\ * & * \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Scegliendo B ortogonale, grazie al teorema spettrale, possiamo dunque sempre ridurci a

$$Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m \end{pmatrix} \text{ dove } \lambda_1, \dots, \lambda_m \text{ sono gli}$$

autovalori della Q originale. Scegliendo poi

B diagonale possiamo anche ridurci a

$$Q = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_m \end{pmatrix} \text{ con } \sigma_i = \operatorname{sgn}(\lambda_i) = \begin{cases} +1 & \lambda_i > 0 \\ 0 & \lambda_i = 0 \\ -1 & \lambda_i < 0 \end{cases}.$$

Notiamo che con un cambiamento di coordinate proiettivo possiamo anche ridurci a

$$A = \begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_{u+1} \end{pmatrix} \text{ con } \mu_1, \dots, \mu_{u+1} \text{ gli}$$

autovalori della A originale, facio^{te} poi a

$$A = \begin{pmatrix} \tau_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \tau_{m+1} \end{pmatrix} \text{ con } \tau_j = \operatorname{sgn}(\mu_j'),$$

ma così facendo non abbiamo mandato $\mathbb{R}^m$ in se^{te}, dunque siamo usciti dal quadro dei cambi di coordinate affini (abbiamo puntato al finito punti all' ∞).

Modelli matrici delle coniche

Nome	Definizione	Equazione a meno di isometrie di $\mathbb{R}^2$	Matrice a meno di affinità	Proprietà focali
ellisse	$\{P: d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2k\}$ F_1, F_2 fuochi $d(F_1, F_2) = 2h, k > h$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $k = a, h = \sqrt{a^2 - b^2}$	$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$	i raggi emessi in un fuoco sono riflessi nell'altro
iperbole	$\{P: d(P, F_1) - d(P, F_2) = 2k\}$ F_1, F_2 fuochi $d(F_1, F_2) = 2h, k < h$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ $k = a, h = \sqrt{a^2 + b^2}$	$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$	i raggi emessi in un fuoco sono riflessi come se emessi nell'altro
parabola	$\{P: d(P, F) = d(P, r)\}$ F fuoco, r direttrice $d(F, r) = 2h$	$y = ax^2$ $h = \frac{1}{4a}$	$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & 1 \\ & 1 & 0 \end{pmatrix}$	i raggi emessi nel fuoco sono riflessi paralleli all'asse
$\emptyset$		$x^2 + y^2 + 1 = 0$	$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$	

Per classificare un luogo $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

poniamo $d_1 = a_{11}, d_2 = \det Q, d_3 = \det(A)$.

Osservazioni:

- cambiando segno all'equazione cambiano i segni di d_1 e d_3 , non di d_2

- restringendoci a $d_3 \neq 0$ (non degenerare) non possiamo avere $Q = 0$
- se $d_2 > 0$ abbiamo $d_1 \neq 0$ ($\det \begin{pmatrix} 0 & k \\ k & * \end{pmatrix} \leq 0$)
- anche $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ definisce un'iperbole.

Teorema: il luogo associato a una matrice A con $\det(A) \neq 0$ (cioè $d_3 \neq 0$) è:

- un'ellisse se $d_2 > 0$ e $d_1 \cdot d_3 < 0$
- $\emptyset$ se $d_2 > 0$ e $d_1 \cdot d_3 > 0$
- un'iperbole se $d_2 < 0$
- una parabola se $d_2 = 0$.

Dimostrazione: per quanto osservato, con un cambio di coordinate del tipo $\begin{pmatrix} X \cdot D & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ con X ortogonale e D diagonale, e eventualmente con un cambio di segno, possiamo ridurre a

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ oppure } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ oppure } \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Se $\det Q \neq 0$ cambiamo ulteriormente le coordinate con

$$\begin{pmatrix} I & -Q^{-1}l \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

riducendoci a $l=0$. Siccome questi cambi di coordinate preservano il segno di $\det(A)$, abbiamo $c \neq 0$, e anzi $c < 0$ nel caso $d_2 > 0$, $d_1 \cdot d_3 < 0$ (abbiamo già fatto in modo che $d_1 > 0$) e $c > 0$ nel caso $d_2 > 0$, $d_1 \cdot d_3 > 0$.

Con l'ultimo cambio di coordinate $\begin{pmatrix} \sqrt{|c|} \cdot I & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e poi dividendo l'equazione per $|c|$ troviamo allora

$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$
$d_2 > 0$ $d_1 \cdot d_3 < 0$	$d_2 > 0$ $d_1 \cdot d_3 > 0$	$d_2 < 0$
ellisse	$\emptyset$	iperbola

Resta il caso $d_2 = 0$, ovvero $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Con il cambio di coordinate $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -l_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

ci riduciamo a $l_1 = 0$ (dunque $l_2 \neq 0$), quindi con

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/l_2 & -c/2l_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ a } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ la parabola. } \square$$

Oss: per le parti dell' ∞ abbiamo

$$d = \{x^2 + y^2 = 1\} \text{ (ellisse)}$$

$$\Rightarrow d_\infty = \emptyset;$$

$$d = \{x^2 - y^2 = 1\} \text{ (iperbole)}$$

$$\Rightarrow d_\infty = \{[1:1], [1:-1]\} \text{ (le direzioni degli asintoti);}$$

$$d = \{y = x^2\} \text{ (parabola)}$$

$$\Rightarrow d_\infty = \{[0:1]\} \text{ (la direzione dell'asse).}$$