Coniche metriche e affini

Carlo Petronio

Dicembre 2007

Queste note riguardano le coniche non degeneri, le loro equazioni metriche e la loro classificazione affine.

1 Piano euclideo, isometrie e trasformazioni affini

La distanza tra due punti del piano di coordinate (x_1, y_1) e (x_2, y_2) si calcola usando il teorema di Pitagora e vale

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Le *isometrie* del piano, ovvero le bigezioni $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ che preservano la distanza, sono combinazioni di trasformazioni dei tipi seguenti:

- traslazioni;
- rotazioni intorno a punti;
- riflessioni rispetto a rette.

Considerando un'isometria come un cambiamento di coordinate, essa è descritta da una formula del tipo

$$\begin{cases} \xi = ax + by + c \\ \eta = \alpha x + \beta y + \gamma \end{cases}$$

e la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$ ha le proprietà

$$ab + \alpha\beta = 0, \qquad a^2 + \alpha^2 = b^2 + \beta^2 = 1$$

da cui segue che $\det \begin{pmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} = \pm 1$. Un cambiamento di coordinate qualsiasi, che chiameremo *affine*, è invece la composizione di una bigezione lineare con una traslazione, dunque è anch'esso descritto dalla formula

$$\begin{cases} \xi = ax + by + c \\ \eta = \alpha x + \beta y + \gamma \end{cases}$$

nella quale però si richiede soltanto che $\det \begin{pmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \neq 0$.

2 Equazioni metriche di circonferenza, ellisse, parabola e iperbole

Le coniche sono particolari luoghi geometrici nel piano, definiti attraverso la nozione di distanza. Le descriveremo *a meno di isometrie*, cioè scriveremo le loro equazioni rispetto a opportuni sistemi di coordinate ottenuti con una trasformazione isometrica a partire dalle coordinate originali.

Circonferenza La circonferenza è il luogo dei punti aventi una fissata distanza $r > 0$ da un punto fissato, detto *centro*. Applicando un'isometria (in questo caso, una traslazione) possiamo supporre che il centro sia l'origine, quindi l'equazione della circonferenza è

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Ellisse L'ellisse è l'insieme dei punti che hanno fissata somma delle distanze da due punti fissati, detti *fuochi*. Applicando la traslazione che porta l'origine nel punto medio del segmento che congiunge i fuochi, seguita da una rotazione intorno all'origine, possiamo supporre che i fuochi siano $(-h, 0)$ e $(h, 0)$ per qualche $h > 0$. Se $2k > 0$ è il valore costante sull'ellisse della somma delle distanze dai fuochi, vediamo che $k > h$, in quanto la minima possibile somma delle distanze da $(-h, 0)$ e $(h, 0)$ per un punto del piano si ha sul segmento $[-h, h] \times \{0\}$ e vale $2h$. L'equazione dell'ellisse è allora

$$\sqrt{(x+h)^2 + y^2} + \sqrt{(x-h)^2 + y^2} = 2k$$

dalla quale con semplici manipolazioni algebriche si ottiene l'equazione equivalente

$$\frac{x^2}{k^2} + \frac{y^2}{k^2 - h^2} = 1$$

che possiamo riscrivere per opportuni $a > b > 0$ come

$$(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$$

e che consideriamo l'equazione canonica metrica di un'ellisse. I numeri a, b sono detti *semiassi* perché gli assi coordinati sono assi di simmetria per l'ellisse e i segmenti interni all'ellisse su di essi hanno lunghezze $2a$ e $2b$.

Iperbole L'iperbole è l'insieme dei punti che hanno fissata differenza (in valore assoluto) delle distanze da due punti fissati, detti *fuochi*. Come per l'ellisse possiamo supporre a meno di isometrie che i fuochi siano $(-h, 0)$ e $(h, 0)$ per qualche $h > 0$. Se $2k > 0$ è il valore costante sull'iperbole della differenza delle distanze dai fuochi, vediamo che $k < h$, in quanto la massima possibile differenza delle distanze da $(-h, 0)$ e $(h, 0)$ per un punto del piano si ha sull'asse delle ascisse fuori dal segmento $(-h, h) \times \{0\}$ e vale $2h$. L'equazione dell'iperbole è allora

$$\left| \sqrt{(x+h)^2 + y^2} - \sqrt{(x-h)^2 + y^2} \right| = 2k.$$

Sviluppando i calcoli si ottiene esattamente la medesima equazione trovata per l'ellisse (infatti il segno "$-$" per cui differiscono le equazioni iniziali svanisce con un elevamento al quadrato), che conviene però scrivere come

$$\frac{x^2}{k^2} - \frac{y^2}{h^2 - k^2} = 1$$

e che possiamo riscrivere per opportuni $a, b > 0$ come

$$(x/a)^2 - (y/b)^2 = 1$$

che consideriamo l'equazione canonica metrica di un'iperbole. I numeri a, b sono ancora detti *semiassi*.

Parabola La parabola è l'insieme dei punti equidistanti da una retta fissata e da un punto fissato fuori dalla retta. Traslando l'origine degli assi nel punto medio del segmento di minima distanza tra il punto e la retta ed eseguendo una rotazione, vediamo che a meno di isometria possiamo supporre che la retta abbia equazione $y = -h$ e il punto sia $(0, h)$ per qualche $h > 0$. L'equazione della parabola è dunque

$$|y + h| = \sqrt{x^2 + (y - h)^2}$$

da cui elevando al quadrato si trova $4hy = x^2$ ovvero

$$y = ax^2$$

per qualche $a > 0$, che consideriamo l'equazione canonica metrica della parabola.

Sezioni coniche L'equazione $x^2 + y^2 = z^2$ definisce in $\mathbb{R}^3$ un cono. Infatti x^2+y^2 rappresenta la distanza del punto (x, y, z) dall'asse z, dunque il luogo di equazione $x^2 + y^2 = z^2$ si ottiene ruotando intorno all'asse z l'unione delle rette $x \pm z = 0$ nel piano xz (o anche una sola di esse), da cui risulta appunto un cono. Si può verificare che le coniche metriche sopra descritte sono tutte e sole le curve che si ottengono intersecando il cono $x^2 + y^2 = z^2$ con un piano che non contenga l'origine. Ad esempio se intersechiamo con $z = 1$ otteniamo la circonferenza unitaria $x^2 + y^2 = 1$ (una particolare ellisse). Se invece intersechiamo con $y = 1$ troviamo l'iperbole $z^2 - x^2 = 1$. E infine se intersechiamo con il piano $x + z = 1$ sul quale poniamo coordinate $\eta = z - x$ e $\xi = y$ otteniamo la parabola $\eta = \xi^2$.

3 Matrice di una conica e classificazione affine delle coniche non degeneri

Consideriamo ora le coniche sopra descritte solo a meno di trasformazioni affini. Abbiamo allora le equazioni canoniche $x^2 + y^2 = 1$ (ellisse), $x^2 - y^2 = 1$ (iperbole) e $y = x^2$ (parabola). Conviene anche osservare che con un cambio di coordinate l'equazione dell'iperbole prende la forma $xy = 1$, che può anch'essa essere impiegata come equazione canonica.

Ci poniamo ora il problema di classificare dal punto di vista affine il luogo di zeri di un polinomio di secondo grado, ovvero un luogo di equazione

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

La ragione della notazione scelta per i coefficienti è che l'equazione può essere riscritta come

$$^{\mathrm{t}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

L'utilità di questa scrittura emerge pienamente nell'ambito dello studio delle coniche tramite la geometria proiettiva, non trattato in queste note. Ci limitiamo qui invece a una verifica brutale del fatto che si può classificare il luogo definito dall'equazione precedente impiegando tecniche di algebra lineare. La spiegazione concettuale della ragione per cui queste tecniche funzionano è rimandata al futuro.

Poniamo dunque $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$ e proponiamoci di classificare dal punto di vista affine il luogo definito dall'equazione di secondo grado cui è associata la matrice A. Per $i = 1, 2, 3$ definiamo allora d_i come il determinante della sottomatrice quadrata di A formata dalle prime i righe e dalle prime i colonne. Dunque d_1 è il coefficiente di x^2, d_2 è il determinante della parte di A relativa alla porzione puramente quadratica dell'equazione, mentre d_3 non è altro che il determinante di A. Diamo per buono senza dimostrarlo il seguente:

Fatto. *Un'equazione di secondo grado cui è associata una matrice A con determinante non nullo definisce un'ellisse, un'iperbole, una parabola, oppure l'insieme vuoto.*

Accettando questo fatto procediamo, per la classificazione delle varie possibilità, all'inverso, cioè prendiamo ciascuna delle equazioni canoniche delle coniche (nonché $\xi^2+\eta^2+1 = 0$ per l'insieme vuoto), applichiamo un qualsiasi cambiamento di coordinate

$$\begin{cases} \xi = ax + by + c \\ \eta = \alpha x + \beta y + \gamma \end{cases}$$

con $\det \begin{pmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \neq 0$, ed esaminiamo le proprietà della matrice associata al polinomio risultante.

Per l'ellisse abbiamo l'equazione canonica affine $\xi^2 + \eta^2 - 1 = 0$. Sostituendo a ξ e η la loro espressione rispetto alle nuove coordinate x e y, con facili calcoli otteniamo

$$(a^2+\alpha^2)x^2+2(ab+\alpha\beta)xy+(b^2+\beta^2)y^2+2(ac+\alpha\gamma)x+2(bc+\beta\gamma)y+c^2+\gamma^2-1=0$$

dunque la matrice associata è

$$A = \begin{pmatrix} a^2+\alpha^2 & ab+\alpha\beta & ac+\alpha\gamma \\ ab+\alpha\beta & b^2+\beta^2 & bc+\beta\gamma \\ ac+\alpha\gamma & bc+\beta\gamma & c^2+\gamma^2-1 \end{pmatrix}$$

e facciamo le osservazioni seguenti:

- d_1 vale $a^2 + \alpha^2$ ed è non nullo (positivo);
- d_2 vale $(a^2+\alpha^2)\cdot(b^2+\beta^2)-(ab+\alpha\beta)^2 = (a\beta - b\alpha)^2$ dunque è positivo;
- d_3 vale $-(a\beta - b\alpha)^2$ dunque è non nullo (negativo); in particolare è discorde da d_1.

Analogamente per l'iperbole partiamo dall'equazione $\xi\eta - 1 = 0$ trovando

$$a\alpha x^2 + (a\beta + b\alpha)xy + b\beta y^2 + (a\gamma + c\alpha)x + (b\gamma + c\beta)y + (c\gamma - 1) = 0$$

dunque

$$A = \begin{pmatrix} a\alpha & (a\beta+b\alpha)/2 & (a\gamma+c\alpha)/2 \\ (a\beta+b\alpha)/2 & b\beta & (b\gamma+c\beta)/2 \\ (a\gamma+c\alpha)/2 & (b\gamma+c\beta)/2 & c\gamma-1 \end{pmatrix}$$

e notiamo che

- d_2 vale $(a\alpha)\cdot(b\beta)-(a\beta+b\alpha)^2/4 = -(a\beta-b\alpha)^2/4$ dunque è negativo;
- d_3 vale $(a\beta - b\alpha)^2/4$ dunque è non nullo.

Calcoli analoghi conducono per la parabola $\xi^2 - \eta = 0$ alle conclusioni che

- d_2 è nullo;

- d_3 è non nullo.

e per il vuoto $\xi^2 + \eta^2 + 1 = 0$ alle seguenti:

- d_1 è non nullo;
- d_2 è positivo;
- d_3 è non nullo e concorde con d_1.

Osserviamo che i segni di per sé di d_1 e d_3 non sono mai significativi, perché moltiplicando l'equazione di secondo grado per -1 il luogo definito non cambia mentre d_1 e d_3 vengono sostituiti dai propri opposti. Il confronto dei segni di d_1 e d_3 ha invece un valore intrinseco quando d_2 è positivo.

In definitiva possiamo concludere che vale il seguente metodo di classificazione delle coniche con matrice associata non singolare:

Teorema. *Dato un polinomio di secondo grado $p(x, y)$ per classificare dal punto di vista affine il luogo di equazione $p(x, y) = 0$:*

- *Si determina la matrice 3×3 simmetrica associata al polinomio;*
- *Si calcolano i determinanti d_1, d_2, d_3;*
- *Se $d_3 = 0$ si conclude che il luogo è una conica degenere e lo si studia a mano;*
- *Altrimenti si esamina d_2:*
  - *se $d_2 < 0$ si conclude che il luogo è un'iperbole;*
  - *se $d_2 = 0$ si conclude che il luogo è una parabola;*
  - *se $d_2 > 0$ (da cui segue che d_1 non è nullo) si confrontano d_1 e d_3: se sono discordi il luogo è un'ellisse, altrimenti è vuoto.*

Per concludere menzioniamo i tipi possibili delle coniche degeneri, escludendo il caso in cui l'equazione si riduca a una lineare:

- due rette parallele, di equazione canonica $x^2 = 1$;
- due rette incidenti, di equazione canonica $xy = 0$;

- una singola retta, di equazione canonica $x^2 = 0$;
- un singolo punto, di equazione canonica $x^2 + y^2 = 0$.

In presenza di un'equazione di secondo grado che abbia matrice associata con determinante nullo, la classificazione del luogo definito si ottiene cercando un cambiamento affine di coordinate che porti l'equazione a una delle quattro canoniche appena scritte.