

Rudimenti di calcolo differenziale

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ è aperto se $\forall x \in \Omega \exists r > 0$ t.c.
 $\{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| < r\} \subset \Omega$.

Se $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ definiamo (se esistono):

- derivata parziale j -esima

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + te_j) - f(x)}{t}$$

- derivata nella direzione $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t}$$

Teo: $f \in C^1(\Omega)$ (tutte le $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ esistono continue)

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial v}(x) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \cdot v_j$$

Possiamo poi prendere le derivate seconde:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right)$$

$$\text{Teo: } f \in C^2(\Omega) \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}$$

Definiamo allora :

$$\text{grad}_x(f) = \begin{pmatrix} \partial f / \partial x_1(x) \\ \vdots \\ \partial f / \partial x_n(x) \end{pmatrix} \quad \text{gradiente}$$

$$H_x(f) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(x) \right)_{\substack{j=1 \dots n \\ k=1 \dots n}} \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$$

matrice hessiana (simmetrica)

Teo (approssimazione di Taylor al 2° ordine) :

$$f \in C^2(\Omega)$$

$$\Rightarrow f(x+v) = f(x) + \langle \text{grad}_x(f) | v \rangle_{\mathbb{R}^n} \\ + \frac{1}{2} \langle v | v \rangle_{H_x(f)} + o(\|v\|^2).$$

Ne segue subito :

- $\text{grad}_x(f) \neq 0 \Rightarrow x$ non è max/min loc
(il gradiente è la direzione di massima crescita)

- x max/min loc $\Rightarrow \text{grad}_x(f) = 0$ e $H_x(f)$ semidefinita negativa/positiva (autovalori $\leq 0 / \geq 0$).
- $\text{grad}_x(f) = 0$ e $H_x(f)$ definite negative/positive (autovalori $< 0 / > 0$) $\Rightarrow x$ max/min loc.