

Spazi proiettivi

Se X è un insieme, una relazione $\sim$ su X si chiama di equivalenza se è

- riflessiva $x \sim x \quad \forall x$
- simmetrica $x \sim y \Rightarrow y \sim x$
- transitiva $x \sim y, y \sim z \Rightarrow x \sim z.$

Data una tale $\sim$ si chiama

$$[x] = \{y \in X : y \sim x\}$$

classe di equivalenza di $x \in X$. È facile

vedere che l'insieme delle classi di equivalenza costituisce una partizione di X : l'unione è tutto X , e due classi sono disgiunte oppure coincidono. L'insieme delle classi di equivalenza si chiama quoziente di X rispetto a $\sim$ e si indica con $X/\sim$.

Un sottoinsieme R di X che contiene un elemento in ogni classe di equivalenza si

chiamo insieme di rappresentanti. La funzione $R \ni x \mapsto [x] \in X/N$ è una bijezione.

Esempio: se $X = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ e $x \sim y$ se $\exists \lambda > 0$ t.c. $y = \lambda x$ allora un insieme di rappresentanti è la $(n-1)$ -sfera $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$.

Se V è uno spazio vettoriale su $\mathbb{K} = \mathbb{R}/\mathbb{C}$, si chiama spazio proiettivo associato a V il quoziente

$$P(V) = (V \setminus \{0\})/N \text{ dove } v \sim w \text{ se } \exists \lambda \in \mathbb{K}$$

t.c. $w = \lambda v$. Notiamo che automaticamente $\lambda \neq 0$. $P(V)$ corrisponde in modo naturale all'insieme delle rette per 0 in V .

$$\text{Possiamo poi } P^n(\mathbb{K}) = P(\mathbb{K}^{n+1}).$$

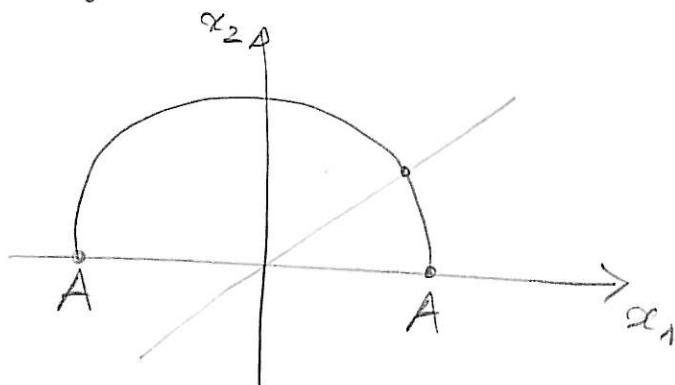
Notiamo che $P^0(\mathbb{K})$ è un solo punto.

$$\underline{P^1(\mathbb{R})}$$

la circonferenza $S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = 1\}$ contiene due punti in ogni classe di equivalenze

di $P^1(\mathbb{R})$, tre loro antipodali. Dunque $P^1(\mathbb{R})$ si ottiene da S^1 identificando tre loro i punti antipodali, il che dà luogo di nuovo a una circonferenza.

Un modo alternativo di vedere lo stesso fatto è quello di notare che l'arco $\{x \in S^1 : x_2 \geq 0\}$ interseca tutte le classi di equivalenza in un punto, tranne una, che lo interseca nei due estremi; dunque $P^1(\mathbb{R})$ si ottiene identificando tre loro gli estremi dell'arco, il che dà luogo a una circonferenza:



$$P^1(\mathbb{R}) = \begin{array}{c} \text{Diagram of a semicircle with endpoints labeled A} \\ = \\ \text{Diagram of a full circle with a single point labeled A at the bottom} \end{array}$$

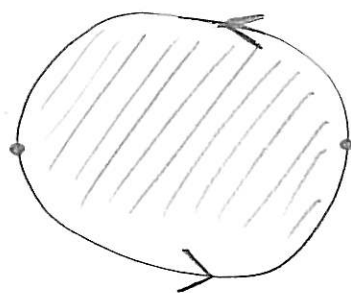
$P^2(\mathbb{R})$

Procedendo come nel secondo approccio a $P^1(\mathbb{R})$, vediamo che $P^2(\mathbb{R})$ è ottenuto da $\{x \in S^2 : x_3 \geq 0\}$, cioè un emisfero delimitato da un equatore, identificando tra loro i punti antipodali sull'equatore.

D'altronde la proiezione verticale dell'emisfero sul disco orizzontale delimitato dall'equatore è una bijezione, dunque

$P^2(\mathbb{R}) =$ un disco con i punti antipodali sul bordo identificati tra loro.

Rappresentiamo tale oggetto con

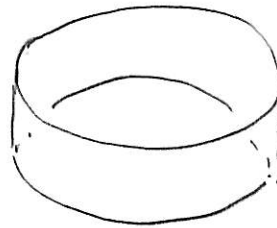


intendendo che i due archi $\longrightarrow$ vanno identificati. Ecco tre costruzioni simili:

•)



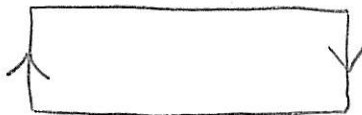
=



=

anello
(cilindro)

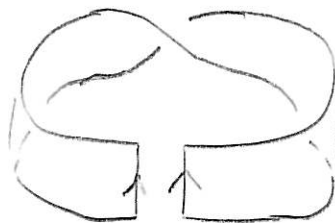
•)



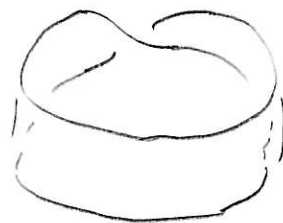
=



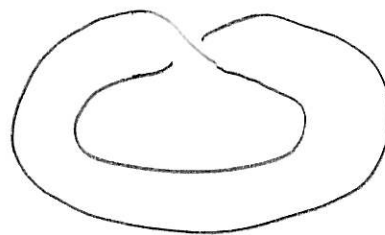
=



=

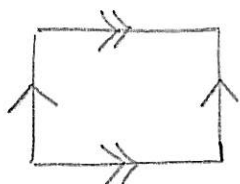


=

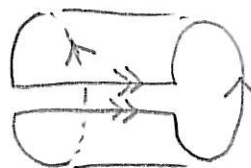


nastro di
Möbius

•)



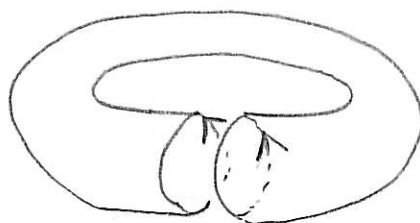
=



=



=

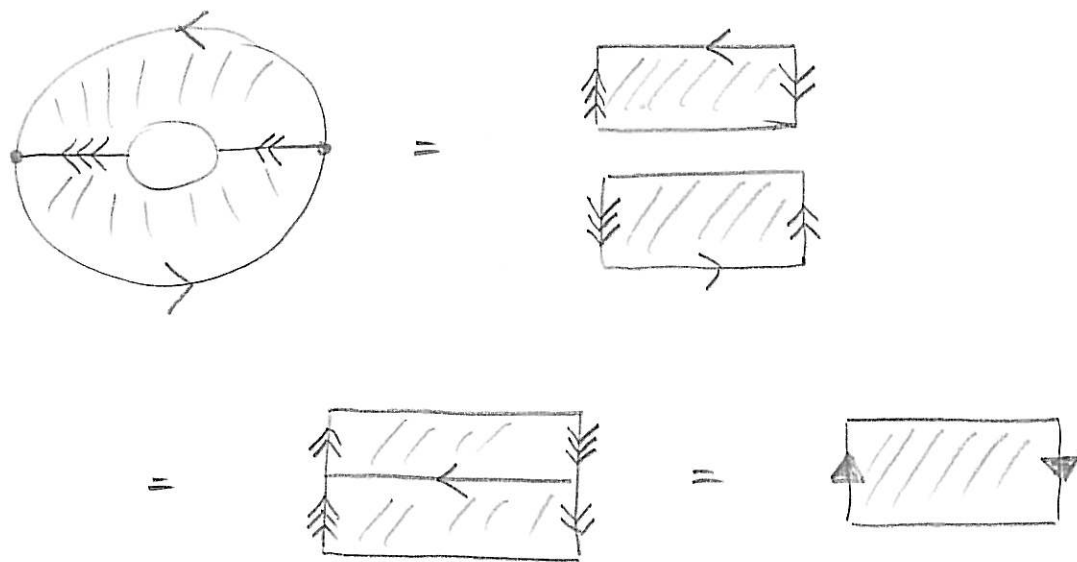


=

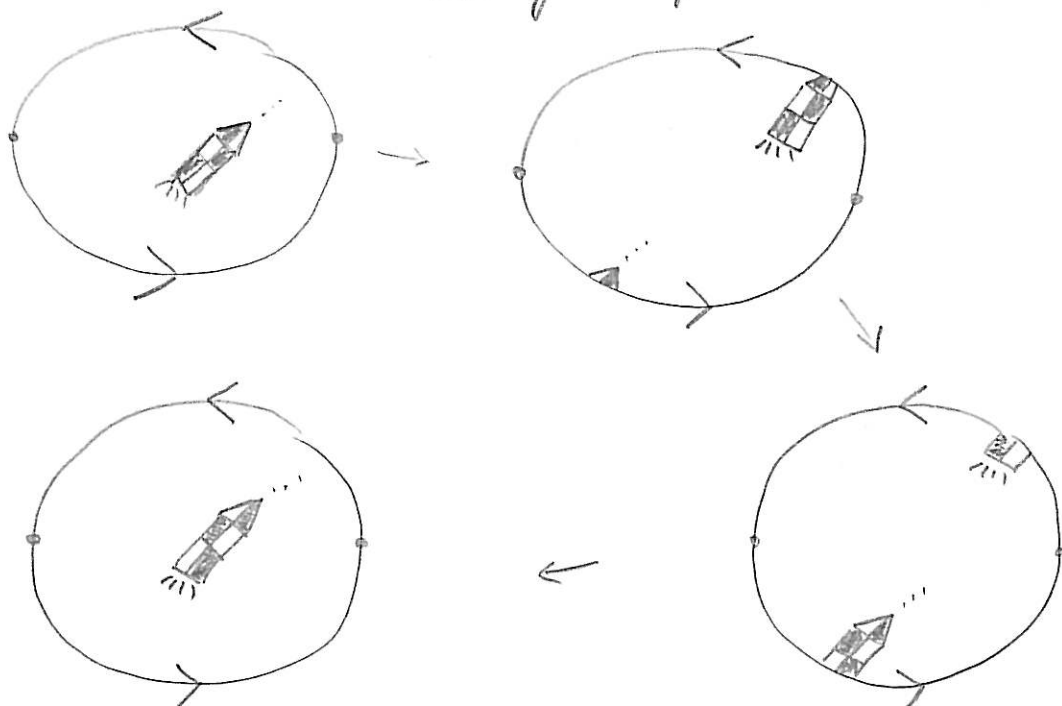


toro

In realtà rimuovendo da $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ un disco aperto si ottiene proprio un nastro di Möbius:



È un fatto che $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ non può essere disegnatosi per intero in $\mathbb{R}^3$. Tuttavia la figura come disco con identificazione sul bordo basta a coprire come ci si vive, ad esempio sparando un razzo:



Notare che quando torneo nelle posizioni
iniziale il pezzo non è quello di prima
ma l'immagine speculare.

$\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ come completamento all' ∞ di $\mathbb{R}^n$

Se identifichiamo $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^n \times \{1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$
vediamo che interseca in un punto ogni
retta che non giace in $\mathbb{R}^n \times \{0\}$, dunque
 $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$. Inoltre ciò che manca
per ottenere $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è $\mathbb{P}(\mathbb{R}^n \times \{0\}) =$
 $= \mathbb{P}(\mathbb{R}^n) = \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$. Dunque

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^n \cup \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R}).$$

Inoltre possiamo vedere un elemento di
 $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$, cioè una retta $\ell \times \{0\}$
con $\ell \subset \mathbb{R}^n$, come il limite di
una successione di punti che tendono
all' ∞ sulle parallele $\ell \times \{1\} \subset \mathbb{R}^n \times \{1\} = \mathbb{R}^n$.
Dunque nelle scritture

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^n \cup \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$$

interpretiamo che $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ sia ottenuto da $\mathbb{R}^n$ completandolo con le direzioni all'∞ delle rette che contiene. I punti all'∞ di $\mathbb{R}^n$ sono dunque a pieno titolo punti di $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$.

Si può visualizzare questa costruzione applicando a $\mathbb{R}^n$ la trasformazione $x \mapsto \frac{x}{1+\|x\|}$ che lo mette in biiezione con il disco aperto $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1\}$.

In questo modo i punti all'∞ diventano quelli di $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$, ma bisogna ricordare che entrambi i versi su una stessa retta definiscono il medesimo punto di $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, dunque i punti antipodali vanno identificati tra loro. In definitiva:

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\} /$$

$x \sim y$ se
 $\|x\| = \|y\| = 1$
e $x = \pm y$

$$= \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1\} \cup \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\} /$$

$\updownarrow$
 $\mathbb{R}^n$

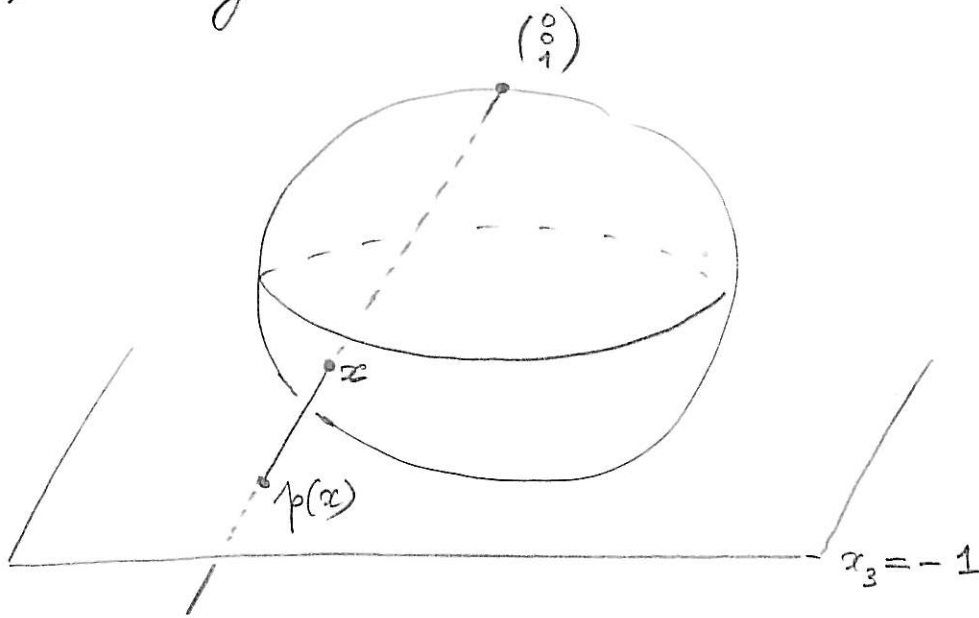
$\updownarrow$
 $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$

$x \sim -x$

$\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$

La costruzione precedente dice che $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \cup (\text{un punto all}'\infty)$, e si applica identica anche a $\mathbb{C}$, dunque $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup (\text{un punto all}'\infty)$. La sfera complessa $\mathbb{C}$ corrisponde al piano reale $\mathbb{R}^2$, ma come sfera complessa ha una sola direzione all' ∞ . Per visualizzare $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ notiamo che con la proiezione stereografica abbiamo

uma bijeção tra $S^2 \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ e $\mathbb{R}^2 \times \{-1\} = \mathbb{R}^2$



donque $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ corresponde a S^2 .