UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria — Corso di Laurea in Ingegneria Civile, dell'Ambiente e del Territorio

Algebra Lineare — Scritto del 30/1/09 — Quesiti

Nome _____ **Cognome** _____ **Matricola** _ _ _ _ _ _

1. Risolvere $\begin{cases} 3x + 2y - 4z = 1 \\ 2x - 3y + 5z = -2 \\ 11x + 3y - 7z = 1. \end{cases}$

2. Data $f : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^9$ lineare con $f(e_1) = f(e_6)$, che dimensione può avere $W \subset \mathbb{R}^9$ tale che $W \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$ e $W + \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^9$?

3. Quanti sono i polinomi in una indeterminata t, di grado al più 2, con coefficienti interi compresi tra -2 e 2, che si annullano per $t = 1$?

4. Quanti parametri si possono usare per dare una presentazione parametrica del sottospazio affine di $\mathbb{R}^4$ di equazioni cartesiane $\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 7x_4 = -2 \\ 2x_1 - 4x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 1 \\ 5x_1 - 4x_2 + 7x_3 - 11x_4 = -8 \end{cases}$?

5. Dati $w_1, w_2, w_3, w_4 \in W = \left\{ z \in \mathbb{C}^8 : \sum_{n=1}^{8} i^n z_n = 0 \right\}$, si cerca di costruire una base di W formata dal massimo numero possibile dei w_j e da altri vettori. Quanti nuovi bisogna sceglierne?

AL **6.** Per quali $k \in \mathbb{R}$ è diagonalizzabile la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -k & k & 0 \\ 1 & k-1 & k^2 \end{pmatrix}$?

GAI **7.** Determinare il tipo affine della conica $x^2 + 3xy + 2y^2 + x = 0$.

8. Se $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$, $\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ e $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, trovare $[v]_{\mathcal{B}'}$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♣ 2. ♠ 3. ♡ 4. ♢ 5. ♢ 6. ♣ 7. ♡ 8. ♢ 9. ♠ 10. ♠

Algebra Lineare — Scritto del 30/1/09 — Esercizî

1. Al variare di k in $\mathbb{R}$ considerare le applicazioni lineari $f_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tali che

$$f_k\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k \\ 0 \\ k+2 \end{pmatrix}, \qquad f_k\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-k \\ 2 \\ 1-2k \end{pmatrix}, \qquad f_k\begin{pmatrix} 0 \\ k \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ k \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(A) (4 punti) Per ogni $k \in \mathbb{R}$ determinare quante siano tali f_k;

(B) (4 punti) Per $k = 1$ verificare che f_k esiste ed è unica e determinare $[f_1]^{\mathcal{E}_3}_{\mathcal{E}_3}$;

AL (C) (4 punti) Per ogni $k \in \mathbb{R}$ tale che f_k esista e sia unica stabilire se è diagonalizzabile;

GAI (D) (4 punti) Per $k = 0$ ortonormalizzare la base di $\mathbb{R}^3$ data dai vettori sui quali è assegnata f_0 e trovare un vettore non nullo ortogonale all'immagine di f_0.

2. Al variare di k in $\mathbb{C}$ considerare la matrice $\begin{pmatrix} k-1-i & 2-i & -1-2i \\ k-1-2i & 2+ik & k-1-2i \\ -ik-2+i & (1+i)k-(1+2i) & (1-i)k+2(i-1) \end{pmatrix}$.

(A) (4 punti) Stabilire per quali k non è invertibile.

(B) (4 punti) Per $k = 0$ provare che è invertibile e determinare i coefficienti di posti $(1,2)$ e $(3,1)$ dell'inversa.

(C) (4 punti) Per $k = 1+i$ trovare equazioni parametriche del sottospazio affine di $\mathbb{C}^3$ definito dall'equazione $A_{(1+i)} \cdot z = \begin{pmatrix} 2+4i \\ -1+i \\ -1-2i \end{pmatrix}$.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria. Dall'inizio della seconda ora si può usare anche un foglio manoscritto contenente enunciati e formule. Si può uscire solo in casi eccezionali. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La soluzione di ogni esercizio deve essere consecutiva su un solo foglio. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto di un esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.

Risposte esatte

9. ♠

1. $y = \frac{1}{2}(23x + 3),\ z = \frac{1}{2}(13x + 1)$

2. $9-\text{rank}(f)$, dove $0 \leq \text{rank}(f) \leq 5$, dunque tra 4 e 9

3. 19

4. Almeno due

5. $7-\dim(\text{Span}(w_1, w_2, w_3, w_4))$, dunque tra 3 e 7

6. $k \neq 0, 1$

7. Iperbole

8. $\begin{pmatrix} -13 \\ -8 \end{pmatrix}$

1. ♣ 2. ♠ 3. ♡ 4. ♢ 5. ♢ 6. ♣ 7. ♡ 8. ♢ 9. ♠ 10. ♠