UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria — Corso di Laurea in Ingegneria Civile, dell'Ambiente e del Territorio

Algebra Lineare — Scritto del 30/1/09 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ␣␣␣␣␣␣

1. Risolvere $\begin{cases} 3x+2y-4z=1 \\ 2x-3y+5z=-2 \\ 11x+3y-7z=1. \end{cases}$

2. Data $f:\mathbb{R}^6\to\mathbb{R}^9$ lineare con $f(e_1)=f(e_6)$, che dimensione può avere $W\subset\mathbb{R}^9$ tale che $W\cap\mathrm{Im}(f)=\{0\}$ e $W+\mathrm{Im}(f)=\mathbb{R}^9$?

3. Quanti sono i polinomi in una indeterminata t, di grado al più 2, con coefficienti interi compresi tra -2 e 2, che si annullano per $t=1$?

4. Quanti parametri si possono usare per dare una presentazione parametrica del sottospazio affine di $\mathbb{R}^4$ di equazioni cartesiane $\begin{cases} 3x_1-4x_2+5x_3-7x_4=-2 \\ 2x_1-4x_2+4x_3-5x_4=1 \\ 5x_1-4x_2+7x_3-11x_4=-8 \end{cases}$?

5. Dati $w_1,w_2,w_3,w_4\in W=\left\{z\in\mathbb{C}^8:\ \sum_{n=1}^{8} i^n z_n=0\right\}$, si cerca di costruire una base di W formata dal massimo numero possibile dei w_j e da altri vettori. Quanti nuovi bisogna sceglierne?

AL **6.** Per quali $k\in\mathbb{R}$ è diagonalizzabile la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -k & k & 0 \\ 1 & k-1 & k^2 \end{pmatrix}$?

GAI **7.** Determinare il tipo affine della conica $x^2+3xy+2y^2+x=0$.

8. Se $\mathcal{B}=\left(\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}\right)$, $\mathcal{B}'=\left(\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}\right)$ e $[v]_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$, trovare $[v]_{\mathcal{B}'}$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♣ 2. ♠ 3. ♡ 4. ♢ 5. ♢ 6. ♣ 7. ♡ 8. ♢ 9. ♠ 10. ♠

UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria — Corso di Laurea in Ingegneria Civile, dell'Ambiente e del Territorio

Algebra Lineare — Scritto del 30/1/09 — Esercizî

1. Al variare di k in $\mathbb{R}$ considerare le applicazioni lineari $f_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tali che

$$f_k\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k \\ 0 \\ k+2 \end{pmatrix}, \qquad f_k\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-k \\ 2 \\ 1-2k \end{pmatrix}, \qquad f_k\begin{pmatrix} 0 \\ k \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ k \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(A) (4 punti) Per ogni $k \in \mathbb{R}$ determinare quante siano tali f_k;

(B) (4 punti) Per $k = 1$ verificare che f_k esiste ed è unica e determinare $[f_1]^{\mathcal{E}_3}_{\mathcal{E}_3}$;

AL (C) (4 punti) Per ogni $k \in \mathbb{R}$ tale che f_k esista e sia unica stabilire se è diagonalizzabile;

GAI (D) (4 punti) Per $k = 0$ ortonormalizzare la base di $\mathbb{R}^3$ data dai vettori sui quali è assegnata f_0 e trovare un vettore non nullo ortogonale all'immagine di f_0.

2. Al variare di k in $\mathbb{C}$ considerare la matrice $\begin{pmatrix} k-1-i & 2-i & -1-2i \\ k-1-2i & 2+ik & k-1-2i \\ -ik-2+i & (1+i)k-(1+2i) & (1-i)k+2(i-1) \end{pmatrix}$.

(A) (4 punti) Stabilire per quali k non è invertibile.

(B) (4 punti) Per $k = 0$ provare che è invertibile e determinare i coefficienti di posti $(1,2)$ e $(3,1)$ dell'inversa.

(C) (4 punti) Per $k = 1+i$ trovare equazioni parametriche del sottospazio affine di $\mathbb{C}^3$ definito dall'equazione $A_{(1+i)} \cdot z = \begin{pmatrix} 2+4i \\ -1+i \\ -1-2i \end{pmatrix}$.

Risposte esatte

9. ♠

1. $y = \frac{1}{2}(23x+3),\ z = \frac{1}{2}(13x+1)$

2. $9-\text{rank}(f)$, dove $0 \leq \text{rank}(f) \leq 5$, dunque tra 4 e 9

3. 19

4. Almeno due

5. $7-\dim(\text{Span}(w_1, w_2, w_3, w_4))$, dunque tra 3 e 7

6. $k \neq 0, 1$

7. Iperbole

8. $\begin{pmatrix} -13 \\ -8 \end{pmatrix}$

1. ♣ 2. ♠ 3. ♡ 4. ♢ 5. ♢ 6. ♣ 7. ♡ 8. ♢ 9. ♠ 10. ♠