UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria — Corso di Laurea in Ingegneria Civile, dell'Ambiente e del Territorio

Algebra Lineare — Scritto del 30/1/09 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ______

AL **1.** Per quali $k \in \mathbb{R}$ è diagonalizzabile la matrice $\begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ k+2 & -1 & 0 \\ 1 & -k & k^2 \end{pmatrix}$?

2. Risolvere $\begin{cases} 2x + 3y - 4z = 1 \\ 3x - 2y + 5z = -2 \\ 7x + 4y - 3z = 0. \end{cases}$

3. Se $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$, $\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ e $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, trovare $[v]_{\mathcal{B}'}$.

4. Data $g : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^8$ lineare con $g(e_1) + g(e_5) = 0$, che dimensione può avere $X \subset \mathbb{R}^8$ tale che $X \cap \operatorname{Im}(g) = \{0\}$ e $X + \operatorname{Im}(g) = \mathbb{R}^8$?

GAI **5.** Determinare il tipo affine della conica $x^2 + 3xy + 2y^2 + x = 0$.

6. Quanti parametri si possono usare per dare una presentazione parametrica del sottospazio affine di $\mathbb{R}^4$ di equazioni cartesiane $\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 7x_4 = -2 \\ 2x_1 - 4x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 1 \\ 5x_1 - 4x_2 + 7x_3 - 11x_4 = -8 \end{cases}$?

7. Dati $w_1, w_2, w_3, w_4 \in W = \left\{ z \in \mathbb{C}^8 : \sum_{n=1}^{8} i^n z_n = 0 \right\}$, si cerca di costruire una base di W formata dal massimo numero possibile dei w_j e da altri vettori. Quanti nuovi bisogna sceglierne?

8. Quanti sono i polinomi in una indeterminata x, di grado al più 2, con coefficienti interi compresi tra -2 e 2, che si annullano per $x = 1$?

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♣ 2. ♠ 3. ♡ 4. ♢ 5. ♢ 6. ♣ 7. ♡ 8. ♢ 9. ♢ 10. ♠

Algebra Lineare — Scritto del 30/1/09 — Esercizî

1. Al variare di k in $\mathbb{R}$ considerare le applicazioni lineari $f_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tali che

$$f_k\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k \\ 0 \\ k+2 \end{pmatrix}, \qquad f_k\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-k \\ 2 \\ 1-2k \end{pmatrix}, \qquad f_k\begin{pmatrix} 0 \\ k \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ k \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(A) (4 punti) Per ogni $k \in \mathbb{R}$ determinare quante siano tali f_k;

(B) (4 punti) Per $k = 1$ verificare che f_k esiste ed è unica e determinare $[f_1]_{\mathcal{E}_3}^{\mathcal{E}_3}$;

AL (C) (4 punti) Per ogni $k \in \mathbb{R}$ tale che f_k esista e sia unica stabilire se è diagonalizzabile;

GAI (D) (4 punti) Per $k = 0$ ortonormalizzare la base di $\mathbb{R}^3$ data dai vettori sui quali è assegnata f_0 e trovare un vettore non nullo ortogonale all'immagine di f_0.

2. Al variare di k in $\mathbb{C}$ considerare la matrice $\begin{pmatrix} k-1-i & 2-i & -1-2i \\ k-1-2i & 2+ik & k-1-2i \\ -ik-2+i & (1+i)k-(1+2i) & (1-i)k+2(i-1) \end{pmatrix}$.

(A) (4 punti) Stabilire per quali k non è invertibile.

(B) (4 punti) Per $k = 0$ provare che è invertibile e determinare i coefficienti di posti $(1, 2)$ e $(3, 1)$ dell'inversa.

(C) (4 punti) Per $k = 1 + i$ trovare equazioni parametriche del sottospazio affine di $\mathbb{C}^3$ definito dall'equazione $A_{(1+i)} \cdot z = \begin{pmatrix} 2+4i \\ -1+i \\ -1-2i \end{pmatrix}$.

UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria — Corso di Laurea in Ingegneria Civile, dell'Ambiente e del Territorio

Algebra Lineare — Scritto del 30/1/09 — Quesiti

Risposte esatte

9. $\diamondsuit$

1. $k \neq 0, 1, -1$

2. $y = -\frac{1}{7}(22x+3), \ z = -\frac{1}{7}(13x+4)$

3. $\begin{pmatrix} -13 \\ -8 \end{pmatrix}$

4. $8-\text{rank}(g)$, dove $0 \leq \text{rank}(g) \leq 4$, dunque tra 4 e 8

5. Iperbole

6. Almeno due

7. $7-\dim(\text{Span}(w_1, w_2, w_3, w_4))$, dunque tra 3 e 7

8. 19

1. $\clubsuit$ 2. $\spadesuit$ 3. $\heartsuit$ 4. $\diamondsuit$ 5. $\diamondsuit$ 6. $\clubsuit$ 7. $\heartsuit$ 8. $\diamondsuit$ 9. $\diamondsuit$ 10. $\spadesuit$