UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria — Corso di Laurea in Ingegneria Civile, dell'Ambiente e del Territorio

IN SUPREMÆ DIGNITATIS 1343

Algebra Lineare — Scritto del 24/7/09 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** _ _ _ _ _ _

1. Se $A = \begin{pmatrix} 1+i & -i & 1 \\ -2 & 2+i & 0 \\ 1+2i & 1 & i \end{pmatrix}$ calcolare $(A^{-1})_{13}$.

2. Determinare la base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^2$ tale che $[x]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3x_1 - 2x_2 \\ 5x_2 - 7x_1 \end{pmatrix}$ per ogni x in $\mathbb{R}^2$.

3. Sapendo che $A = (v_1 \quad v_2 \quad v_3)$ e $\det(A) = -\frac{1}{5}$ calcolare $\det(3v_3 - 2v_2 \quad v_1 + 4v_3 \quad 2v_1 - 3v_2)$.

4. Se $f : \{x \in \mathbb{R}^7 : \ x_3 = x_5\} \to \mathbb{R}^4$ è lineare e non surgettiva, che dimensione può avere il suo nucleo?

5. Risolvere $\begin{cases} 3x - 2y + 5z = 10 \\ 4x + y + 2z = 5 \\ -6x - 7y + 4z = 5. \end{cases}$

6. Sapendo che $2z^3 + (2i - 11)z^2 + 3(7 - i)z + i - 8 = 0$ ha la soluzione $z = \frac{1}{2}$ trovare le altre.

AL **7.** Trovare gli autovalori di $\begin{pmatrix} 3+i & 3-i \\ -2 & i \end{pmatrix}$ e una base di $\mathbb{C}^2$ che la diagonalizzi.

GAI **8.** Stabilire per quali k la conica di equazione $x^2 + 2kxy + 2y^2 - 2x + 2(1-k)y + 3 - k = 0$ è degenere e per quali è una parabola, quindi classificarla per $k = -2$ e $k = -1$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Algebra Lineare — Scritto del 24/7/09 — Esercizî

1. Al variare di k in $\mathbb{R}$ considerare le applicazioni lineari $f_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tali che

$$f_k\begin{pmatrix} 1+k \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ -1 \end{pmatrix}, \quad f_k\begin{pmatrix} 1 \\ -k \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ k \end{pmatrix}, \quad f_k\begin{pmatrix} 5-2k \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2k \\ 2 \\ 1-k \end{pmatrix}.$$

(A) (4 punti) Determinare quante tali f_k esistono al variare di k.

(B) (4 punti) Per $k=-1$ verificare che f_{-1} esiste unica e determinare la matrice che la rappresenta rispetto alla base canonica in partenza e in arrivo.

(C) (4 punti) Per $k=-2$ determinare basi del nucleo e dell'immagine di f_{-2}.

2. Al variare di k in $\mathbb{R}$ considerare in $\mathbb{R}^3$ i sottospazi affini

$$E_k : \begin{cases} x+y+2z=k \\ (2+k)x-y+kz=1 \end{cases} \qquad F_k = \begin{pmatrix} 1 \\ k+2 \\ 2 \end{pmatrix} + \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 2k-1 \\ 2-k \\ -1-k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3-k \\ k-3 \\ 2(1+k) \end{pmatrix}\right).$$

(A) (3 punti) Al variare di k determinare la dimensione di E_k e darne una presentazione parametrica.

(B) (3 punti) Al variare di k determinare la dimensione di F_k e darne una presentazione cartesiana.

(C) (3 punti) Discutere la posizione reciproca di E_k ed F_k al variare di k.

AL (D) (3 punti) Per $k=0$ determinare l'intersezione di E_0 ed F_0.

GAI (E) (3 punti) Per il valore k_0 di k per il quale F_{k_0} è una retta verificare che anche E_{k_0} è una retta e calcolare l'angolo formato dalle rette di giacitura di E_{k_0} e F_{k_0}.

Risposte esatte

5. $\diamondsuit$

1. $\frac{1}{5}(2-i)$

2. $\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

3. 5

4. Tra 3 e 6

5. $x = 1 - 9t,\ y = -1 + 14t,\ z = 1 + 11t$

6. $2 + i, 3 - 2i$

7. $1 - i, 2 + 3i;\ \begin{pmatrix} 2i-1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1+i \\ -1 \end{pmatrix}$

8. $k = 1, \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{13}\right)$; $k = \pm\sqrt{2}$; iperbole, insieme vuoto

1. $\spadesuit$ 2. $\heartsuit$ 3. $\spadesuit$ 4. $\clubsuit$ 5. $\diamondsuit$ 6. $\spadesuit$ 7. $\clubsuit$ 8. $\heartsuit$ 9. $\clubsuit$ 10. $\diamondsuit$