UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria — Corso di Laurea in Ingegneria Civile, dell'Ambiente e del Territorio

Algebra Lineare — Scritto del 20/2/09 — Quesiti

Nome _____ **Cognome** _____ **Matricola** _ _ _ _ _ _

1. Completare $e_1 - e_2 - e_3$ a una base di $\{x \in \mathbb{R}^4 : \ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 0\}$.

2. Se $f : \mathbb{C}^6 \to \{z \in \mathbb{C}^3 : \ 3z_1 + iz_2 - 2z_3 = 0\}$ è lineare e surgettiva, $X + \mathrm{Ker}(f) = \mathbb{C}^6$ e $X \cap \mathrm{Ker}(f) = \{0\}$, che dimensione ha X?

3. Determinare $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ dove $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ è lineare, $f(e_1) = 2e_1 - 3e_2$, $f(e_2) = 3e_1 + 7e_2$ e $\mathcal{B} = (3e_1 - e_2, -5e_1 + 2e_2)$.

4. Data $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ calcolare $(A^{-1})_{32}$.

5. Tra le orlate della sottomatrice $(1-i)$ della matrice $\begin{pmatrix} i & 0 & -2 \\ 2-i & 3 & 0 \\ 1 & 1-i & 3+2i \end{pmatrix}$ trovare quella avente determinante di modulo massimo.

6. Risolvere $3z^2 + (3i-5)z + 2(1-i) = 0$ con $z \in \mathbb{C}$.

AL **7.** Determinare una base di $\mathbb{R}^2$ che diagonalizzi $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$.

GAI **8.** Per quali $k \in \mathbb{R}$ la conica di equazione $(9-5k)x^2 + 2(k-3)xy + y^2 + 6x - 2y = 0$ è una parabola?

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Algebra Lineare — Scritto del 20/2/09 — Esercizî

1. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ considerare la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 2(2-5k) & 2(1-3k) & k+1 \\ 6(3k-1) & 11k-3 & k \\ 0 & 0 & 1+k^2 \end{pmatrix}$.

(A) (4 punti) Trovare due numeri $k_1 < k_2$ tali che per $k \neq k_{1,2}$ il sistema lineare $A_k \cdot x = b$ abbia un'unica soluzione $x \in \mathbb{R}^3$ per ogni $b \in \mathbb{R}^3$.

(B) (2 punti) Per $k = k_1$ risolvere il sistema $A_{k_1} \cdot x = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(C) (2 punti) Per $k = k_2$ risolvere il sistema $A_{k_2} \cdot x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

AL (D) (4 punti) Discutere la diagonalizzabilità di A_k al variare di k.

GAI (E) (4 punti) Per $k = 0$ determinare gli angoli formati dalle tre possibili coppie di colonne della matrice $A_0 + {}^{t}A_0$.

2. Considerare in $\mathbb{R}^3$ il sottospazio affine $E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix} : 2x - 3y + 5z = 4 \right\}$ e, al variare di $k \in \mathbb{R}$, il sottospazio affine $F_k = \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ 2 \end{pmatrix} + \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 5k+2 \\ 3k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3k+2 \\ 2k+3 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

(A) (4 punti) Determinare la dimensione di E e trovarne una presentazione parametrica.

(B) (4 punti) Per ogni k determinare la dimensione di F_k; trovarne una presentazione cartesiana per $k = 2$.

(C) (4 punti) Verificare che E ed F_k sono sempre paralleli tra loro e stabilire per quali k coincidono.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria. Dall'inizio della seconda ora si può usare anche un foglio manoscritto contenente enunciati e formule. Si può uscire solo in casi eccezionali. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La soluzione di ogni esercizio deve essere consecutiva su un solo foglio. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto di un esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.

Risposte esatte

5. ♡

1. Ad esempio con $3e_1 + 2e_2,\ 4e_3 - 5e_4$

2. 2

3. $\begin{pmatrix} -74 & 137 \\ -45 & 83 \end{pmatrix}$

4. $\frac{4}{5}$

5. $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1-i & 3+2i \end{pmatrix}$

6. $z = \frac{2}{3},\ z = 1 - i$

7. $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right)$

8. $k = 1$

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢