



Algebra Lineare — Scritto del 20/2/09 — Quesiti

Nome _____ Cognome _____ Matricola _____

1. Completare $e_1 + e_2 - e_4$ a una base di $\{x \in \mathbb{R}^4 : 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 5x_4 = 0\}$.
2. Se $f : \{z \in \mathbb{C}^3 : 3z_1 + iz_2 - 2z_3 = 0\} \rightarrow \mathbb{C}^5$ è lineare e iniettiva, $W + \text{Im}(f) = \mathbb{C}^5$ e $W \cap \text{Im}(f) = \{0\}$, che dimensione ha W ?
3. Determinare $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ dove $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ è lineare, $f(e_1) = 3e_1 - 2e_2$, $f(e_2) = -e_1 + 4e_2$ e $\mathcal{B} = (4e_1 - 3e_2, -3e_1 + 2e_2)$.
4. Data $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ calcolare $(A^{-1})_{23}$.
5. Tra le orlate della sottomatrice $(1 + i)$ della matrice $\begin{pmatrix} 0 & i & -2 \\ 2 - i & 3 & 1 + i \\ 1 & 0 & 3 - 2i \end{pmatrix}$ trovare quella avente determinante di modulo massimo.
6. Risolvere $2z^2 - (7 + 2i)z + 3(2 + i) = 0$ con $z \in \mathbb{C}$.
- AL 7. Determinare una base di $\mathbb{R}^2$ che diagonalizzi $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 7 & -5 \end{pmatrix}$.
- GAI 8. Per quali $k \in \mathbb{R}$ la conica di equazione $x^2 + 2(k - 3)xy + (9 - 5k)y^2 + 2x - 4y = 0$ è una parabola?

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♥ 3. ♠ 4. ♣ 5. ◇ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♥ 9. ♣ 10. ◇



1. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ considerare la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 2(2-5k) & 2(1-3k) & k+1 \\ 6(3k-1) & 11k-3 & k \\ 0 & 0 & 1+k^2 \end{pmatrix}$.

(A) (4 punti) Trovare due numeri $k_1 < k_2$ tali che per $k \neq k_{1,2}$ il sistema lineare $A_k \cdot x = b$ abbia un'unica soluzione $x \in \mathbb{R}^3$ per ogni $b \in \mathbb{R}^3$.

(B) (2 punti) Per $k = k_1$ risolvere il sistema $A_{k_1} \cdot x = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(C) (2 punti) Per $k = k_2$ risolvere il sistema $A_{k_2} \cdot x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

AL (D) (4 punti) Discutere la diagonalizzabilità di A_k al variare di k .

GAI (E) (4 punti) Per $k = 0$ determinare gli angoli formati dalle tre possibili coppie di colonne della matrice $A_0 + {}^tA_0$.

2. Considerare in $\mathbb{R}^3$ il sottospazio affine $E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix} : 2x - 3y + 5z = 4 \right\}$ e, al variare di $k \in \mathbb{R}$,

il sottospazio affine $F_k = \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ 2 \end{pmatrix} + \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 5k+2 \\ 3k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3k+2 \\ 2k+3 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

(A) (4 punti) Determinare la dimensione di E e trovarne una presentazione parametrica.

(B) (4 punti) Per ogni k determinare la dimensione di F_k ; trovarne una presentazione cartesiana per $k = 2$.

(C) (4 punti) Verificare che E ed F_k sono sempre paralleli tra loro e stabilire per quali k coincidono.



Risposte esatte

5. $\diamond$ 1. Ad esempio con $2e_1 - 3e_2, 5e_3 + 4e_4$

2. 3

3. $\begin{pmatrix} 30 & -20 \\ 35 & -23 \end{pmatrix}$ 4. $-\frac{7}{11}$ 5. $\begin{pmatrix} 3 & 1+i \\ 0 & 3-2i \end{pmatrix}$ 6. $z = \frac{3}{2}, z = 2+i$ 7. $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix} \right)$ 8. $k = 0$ 1. $\spadesuit$ 2. $\heartsuit$ 3. $\spadesuit$ 4. $\clubsuit$ 5. $\diamond$ 6. $\spadesuit$ 7. $\clubsuit$ 8. $\heartsuit$ 9. $\clubsuit$ 10. $\diamond$