UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria — Corso di Laurea in Ingegneria Civile, dell'Ambiente e del Territorio

IN SUPREMÆ DIGNITATIS 1343

Algebra Lineare — Scritto del 17/9/09 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ␣␣␣␣␣␣

1. Dati 9 vettori linearmente indipendenti in $\{x \in \mathbb{R}^7 : \ x_1 = x_3 = x_7\}$, quanti bisogna eliminarne per ottenere una base?

2. Se $f : \mathbb{C}^5 \to \mathbb{C}^{13}$ è lineare, $f(e_2) = f(e_3 + e_5)$ e $\mathbb{C}^{13} = W + \mathrm{Im}(f)$, cosa si può dire della dimensione di W?

3. Se $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 - x_2 \\ -2x_1 + 5x_2 \end{pmatrix}$ e $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$ determinare $[f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}$.

4. Se $A = \begin{pmatrix} 1-i & 1 & 0 \\ -1 & i & 2 \\ 0 & 1+i & 1 \end{pmatrix}$ calcolare $(A^{-1})_{23}$.

5. Se $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ calcolare i determinanti delle orlate di B in A.

6. Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione $z^3 - 2(1+i)z^2 + 3iz + 1 - i = 0$ sapendo che una soluzione è $z = 1$.

AL **7.** Trovare una base di $\mathbb{R}^2$ che diagonalizza $\begin{pmatrix} 8 & 3 \\ -12 & -7 \end{pmatrix}$.

GAI **8.** Determinare il tipo affine della conica $x^2 - 5xy + 3y^2 - x + 2y + 1 = 0$

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Algebra Lineare — Scritto del 17/9/09 — Esercizî

1. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ sia $A_k = \begin{pmatrix} 7-3k & 2(2-k) & 2(2-k) \\ -3 & -2 & -2 \\ 6(k-2) & 3(k-2) & 4k-7 \end{pmatrix}$.

(A) (3 punti) Per $k = 1$ risolvere il sistema $A_1 \cdot x = \begin{pmatrix} 12 \\ -10 \\ -18 \end{pmatrix}$ con $x \in \mathbb{R}^3$.

(B) (5 punti) Al variare di $k \in \mathbb{R}$ e di $v \in \mathbb{R}$ stabilire quante sono le soluzioni del sistema $A_k \cdot x = v$ con $x \in \mathbb{R}^3$.

AL (C) (4 punti) Stabilire per quali $k \in \mathbb{R}$ la matrice A_k è diagonalizzabile.

GAI (D) (4 punti) Posto $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, per ogni $k \in \mathbb{R}$ calcolare l'angolo tra u e $A_k \cdot u$; inoltre per $k = 2$ calcolare l'angolo tra e_j e $A_2 \cdot e_j$ per $j = 1, 2, 3$ e determinare quale dei tre è il minore.

2. Siano $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 13 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

(A) (3 punti) Provare che $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ è una base di $\mathbb{R}^3$ e calcolare $[v]_{\mathcal{B}}$.

(B) (3 punti) Trovare equazioni cartesiane di $v + \mathrm{Span}(v_1, v_2)$.

(C) (3 punti) Trovare equazioni cartesiane di $v + \mathrm{Span}(v_3)$.

(D) (3 punti) Trovare equazioni parametriche del piano passante per v e parallelo a quello di equazione $7x - 9y + 4z = \sqrt[3]{5}$.

UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria — Corso di Laurea in Ingegneria Civile, dell'Ambiente e del Territorio

Algebra Lineare — Scritto del 17/9/09 — Quesiti

Risposte esatte

5. ♢

1. 4

2. Che è almeno 9

3. $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$

4. $\frac{2}{5}(3-i)$

5. 34 e 15

6. $z = 1,\ z = i,\ z = 1 + i$

7. $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$

8. Iperbole

---

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢
