IN SUPREMÆ DIGNITATIS • 1343 •

Algebra Lineare — Scritto del 16/6/09 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ␣␣␣␣␣␣

1. Se sono dati 10 elementi che generano $\{p(t) \in \mathbb{R}_{\leq 7}[t] : \ p(1) = 0\}$, quanti ne vanno eliminati per avere una base?

2. Se $f : \mathbb{R}^8 \to \mathbb{R}^3$ è lineare surgettiva e $X \subset \mathbb{R}^8$ ha dimensione 5, che dimensione può avere $X \cap \mathrm{Ker}(f)$?

3. Siano $X = \{x \in \mathbb{R}^3 : \ x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$, $f(x) = \begin{pmatrix} x_3 - x_2 \\ 2x_1 + x_2 \\ x_2 - x_1 \end{pmatrix}$ e $\mathcal{B} = (e_1 - 2e_2 + e_3, e_1 - e_2)$.
Determinare $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$.

4. Sia $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -i \\ 0 & -1 & 2 \\ -i & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcolare $(A^{-1})_{32}$.

5. Siano $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $A' = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcolare i determinanti delle orlate di A' in A.

6. Risolvere $z^3 - 3z^2 + (3+i)z - 2(1+i) = 0$ sapendo che una soluzione è $z = i$.

AL **7.** Trovare una base che diagonalizzi $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

GAI **8.** Al variare di $k \in \mathbb{R}$ classificare la conica di equazione $x^2 + 2xy + ky^2 + 2kx + k^2 = 0$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Algebra Lineare — Scritto del 16/6/09 — Esercizî

1. Per $k \in \mathbb{R}$ sia $X = \left\{ x \in \mathbb{R}^4 : \begin{array}{l} x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - kx_3 + x_4 = 0 \\ kx_1 - 3x_2 + 3x_3 + (2k+3)x_4 = 0 \end{array} \right\}$.

(A) (4 punti) Calcolare la dimensione di X al variare di k.

(B) (4 punti) Per $k = -1$ determinare l'intersezione di X con il sottospazio affine di $\mathbb{R}^4$ di equazione $x_4 = 1$.

AL (C) (4 punti) Per $k = 1$ verificare che la formula $f(x) = \begin{pmatrix} 4x_3 + x_4 \\ x_1 + x_3 + x_4 \\ -2x_1 + x_2 + 5x_3 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 \end{pmatrix}$ definisce un'applicazione lineare $f : X \to X$, e stabilire se essa è diagonalizzabile.

GAI (D) (4 punti) Per $k = 3$ provare che l'intersezione tra X e il sottospazio di equazione $x_2 = 0$ è una retta e determinare l'angolo che essa forma con quella generata da $e_1 + 2e_2 - e_3$.

2. Sia $E = \{z \in \mathbb{C}^3 : \ iz_1 + 2(1+i)z_2 + (1-2i)z_3 = 1 - i\}$.

(A) (4 punti) Trovare equazioni parametriche di E.

(B) (4 punti) Esibire una base del sottospazio X di giacitura di E costituita da elementi dell'insieme $\{z \in \mathbb{C}^3 : \ z_2^2 + 1 = 0, \ z_3 = 3 + i\}$.

(C) (4 punti) Verificare che il vettore $(7i-5)e_1 + (2-i)e_2 + (i-1)e_3$ appartiene a X e determinarne le coordinate rispetto alla base del punto precedente.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria. Dall'inizio della seconda ora si può usare anche un foglio manoscritto contenente enunciati e formule. Si può uscire solo in casi eccezionali. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La soluzione di ogni esercizio deve essere consecutiva su un solo foglio. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto di un esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.

UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria — Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, dell'Ambiente e del Territorio

Algebra Lineare — Scritto del 16/6/09 — Quesiti

Risposte esatte

5. ♡

1. 3

2. Tra 2 e 5

3. $\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$

4. $\frac{1}{2}$

5. -16 e 4

6. $z = i,\ z = 1 - i,\ z = 2$

7. $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

8. Iperbole per $k < 0$ e $0 < k < 1$, parabola per $k = 1$, ellisse per $k > 1$, due rette incidenti per $k = 0$

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢