Algebra Lineare — Scritto del 16/6/09 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ⎵⎵⎵⎵⎵⎵

1. Se sono dati tre elementi linearmente indipendenti di $\{p(t) \in \mathbb{R}_{\leq 8}[t] : \ p(-1) = 0\}$, quanti ne vanno aggiunti per avere una base?

2. Se $f : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^2$ è lineare surgettiva e $X \subset \mathbb{R}^7$ ha dimensione 4, che dimensione può avere $X \cap \mathrm{Ker}(f)$?

3. Siano $X = \{x \in \mathbb{R}^3 : \ x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$, $f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 \\ x_3 + x_2 \\ x_2 - x_1 \end{pmatrix}$ e $\mathcal{B} = (e_1 + e_2 - 2e_3, e_1 - e_3)$.
Determinare $[f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}$.

4. Sia $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & i \\ 0 & -1 & 1 \\ i & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcolare $(A^{-1})_{13}$.

5. Siano $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $A' = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Calcolare i determinanti delle orlate di A' in A.

6. Risolvere $z^3 + (1-2i)z^2 - 3(1+i)z + 2(i-1) = 0$ sapendo che una soluzione è $z = i$.

AL **7.** Trovare una base che diagonalizzi $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

GAI **8.** Al variare di $k \in \mathbb{R}$ classificare la conica di equazione $x^2 + 2xy + ky^2 + 2kx + k^2 = 0$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Algebra Lineare — Scritto del 16/6/09 — Esercizî

1. Per $k \in \mathbb{R}$ sia $X = \left\{ x \in \mathbb{R}^4 : \begin{array}{c} x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - kx_3 + x_4 = 0 \\ kx_1 - 3x_2 + 3x_3 + (2k+3)x_4 = 0 \end{array} \right\}$.

(A) (4 punti) Calcolare la dimensione di X al variare di k.

(B) (4 punti) Per $k = -1$ determinare l'intersezione di X con il sottospazio affine di $\mathbb{R}^4$ di equazione $x_4 = 1$.

AL (C) (4 punti) Per $k = 1$ verificare che la formula $f(x) = \begin{pmatrix} 4x_3 + x_4 \\ x_1 + x_3 + x_4 \\ -2x_1 + x_2 + 5x_3 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 \end{pmatrix}$ definisce un'applicazione lineare $f : X \to X$, e stabilire se essa è diagonalizzabile.

GAI (D) (4 punti) Per $k = 3$ provare che l'intersezione tra X e il sottospazio di equazione $x_2 = 0$ è una retta e determinare l'angolo che essa forma con quella generata da $e_1 + 2e_2 - e_3$.

2. Sia $E = \{z \in \mathbb{C}^3 : \ iz_1 + 2(1+i)z_2 + (1-2i)z_3 = 1 - i\}$.

(A) (4 punti) Trovare equazioni parametriche di E.

(B) (4 punti) Esibire una base del sottospazio X di giacitura di E costituita da elementi dell'insieme $\{z \in \mathbb{C}^3 : \ z_2^2 + 1 = 0, \ z_3 = 3 + i\}$.

(C) (4 punti) Verificare che il vettore $(7i - 5)e_1 + (2 - i)e_2 + (i - 1)e_3$ appartiene a X e determinarne le coordinate rispetto alla base del punto precedente.

UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria — Corso di Laurea in Ingegneria Civile, dell'Ambiente e del Territorio

Algebra Lineare — Scritto del 16/6/09 — Quesiti

Risposte esatte

5. ♢

1. 5

2. Tra 2 e 4

3. $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

4. $1 - i$

5. -10 e -5

6. $z = i, \; z = 1 + i, \; z = -2$

7. $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

8. Iperbole per $k < 0$ e $0 < k < 1$, parabola per $k = 1$, ellisse per $k > 1$, due rette incidenti per $k = 0$

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢