UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria — Corso di Laurea in Ingegneria Civile, dell'Ambiente e del Territorio

Algebra Lineare — Scritto del 13/1/09 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** _ _ _ _ _ _

1. Il numero $\sqrt{2}+\sqrt{11-6\sqrt{2}}$ è razionale?

2. Completare $e_1+ie_2-2e_3-e_4$ a una base di $\{z\in\mathbb{C}^4:\ (1+i)z_1+(1-i)z_2+iz_3+2z_4=0\}$.

3. Risolvere $\begin{cases} 2x-3y+4z=-12\\ 3x+2y-5z=-3\\ 4x+5y-z=11.\end{cases}$

4. Se $A=(v_1,\ v_2,\ v_3)\in\mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{C})$, $\det(A)\neq 0$ e $B=((1-i)v_2+v_3,\ 3v_1+iv_3,\ v_1-iv_2+2v_3)$, quanto vale $\det(B)/\det(A)$?

5. Se $V=\{x\in\mathbb{R}^{3k}:\ x_1=x_k\}$, $W,Z\subset V$, $\dim(W)=k$ e $W+Z=V$, che dimensione può avere Z?

6. Se $A\in\mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})$ e $B\in\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ è una sottomatice di A, quante sono le orlate di B in A?

AL **7.** È diagonalizzabile la matrice $\begin{pmatrix} -4 & 0 & 5\\ -2 & 1 & 3\\ -3 & 0 & 4\end{pmatrix}$?

GAI **8.** Determinare il tipo affine della conica $3x^2-2xy+8y^2+x-3y+1=0$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

1. In $\mathbb{R}^4$ considerare il sottospazio affine E di equazioni cartesiane $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = -1 \end{cases}$ e, al variare di k in $\mathbb{R}$, il sottospazio affine

$$F_k = \begin{pmatrix} 1-k \\ 1 \\ k \\ 2 \end{pmatrix} + \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} -k \\ 2k^2-3k+2 \\ 1 \\ 2k^2-5k+5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2(1-k) \\ 2k(k-1) \\ k-1 \\ 2k^2-3k+1 \end{pmatrix}\right).$$

(A) (2 punti) Trovare equazioni parametriche per E.

(B) (2 punti) Trovare equazioni cartesiane di F_k per $k = 0$.

(C) (2 punti) Al variare di k determinare la dimensione di F_k.

(D) (2 punti) Determinare i valori di k per i quali E ed F_k si intersecano e descrivere la loro intersezione.

(E) (2 punti) Stabilire se esitono valori di k per i quali E ed F_k hanno la stessa dimensione e sono paralleli tra loro.

(F) (2 punti) Per ogni k determinare la dimensione di $E + F_k$

2. Considerare la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ data da $f(x) = A \cdot x$ e i vettori $v_1 = 5e_1 + 2e_2 + e_3$, $v_2 = 3e_1 + e_2 + e_3$, $v_3 = -2e_1 - 3e_2 + 5e_3$ in $\mathbb{R}^3$.

(A) (2 punti) Provare che $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ è una base di $\mathbb{R}^3$.

(B) (2 punti) Calcolare A^{-1}.

(C) (4 punti) Determinare le matrici $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}_3}$, $[f]_{\mathcal{E}_3}^{\mathcal{B}}$ e $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$.

AL (D) (4 punti) Stabilire se A sia diagonalizzabile.

GAI (E) (4 punti) Stabilire quale tra v_1, v_2, v_3 formi l'angolo maggiore con la retta ortogonale al piano generato dagli altri due.

Risposte esatte

5. ♡

1. Sì: vale 3

2. Ad esempio con $e_1 - ie_2,\ 2ie_3 + e_4$

3. $x = -2,\ y = 4,\ z = 1$

4. $-5 + 4i$

5. Tra $2k - 1$ e $3k - 1$

6. 4

AL **7.** No, ha autovalori -1 e 1, ma m.a.(1) = 2 e m.g.(1) = 1

GAI **8.** Insieme vuoto

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢