



Algebra Lineare — Scritto del 13/1/09 — Quesiti

Nome _____ Cognome _____ Matricola _____

1. Il numero $(1 + 3\sqrt{2})^2$ è razionale?
2. Completare $-2e_1 - e_2 + e_3 + ie_4$ a una base di $\{z \in \mathbb{C}^4 : iz_1 + 2z_2 + (1+i)z_3 + (1-i)z_4 = 0\}$.
3. Risolvere
$$\begin{cases} 2x - 3y + z = -14 \\ 3x + 2y - 5z = 5 \\ 4x + 5y - 3z = 10. \end{cases}$$
4. Se $A = (v_1, v_2, v_3) \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{C})$, $\det(A) \neq 0$ e $B = ((1+i)v_1 - v_3, 2v_2 + iv_3, v_1 - iv_2 + 3v_3)$, quanto vale $\det(B)/\det(A)$?
5. Se $X = \{x \in \mathbb{R}^{2n} : x_1 = 3x_n\}$, $Y, Z \subset X$, $\dim(Y) = n$ e $Y + Z = X$, che dimensione può avere Z ?
6. Se $A \in \mathcal{M}_{3 \times 5}(\mathbb{R})$ e $B \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ è una sottomatrice di A , quante sono le orlate di B in A ?
- AL 7. È diagonalizzabile la matrice $\begin{pmatrix} 5 & 0 & -3 \\ 3 & 2 & -2 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$?
- GAI 8. Determinare il tipo affine della conica $3x^2 - 8xy + 2y^2 + 5x - y + 1 = 0$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♥ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♦ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♥ 9. ♣ 10. ♦



1. In \mathbb{R}^4 considerare il sottospazio affine E di equazioni cartesiane $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = -1 \end{cases}$
e, al variare di k in \mathbb{R} , il sottospazio affine

$$F_k = \begin{pmatrix} 1-k \\ 1 \\ k \\ 2 \end{pmatrix} + \text{Span} \left(\begin{pmatrix} -k \\ 2k^2 - 3k + 2 \\ 1 \\ 2k^2 - 5k + 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2(1-k) \\ 2k(k-1) \\ k-1 \\ 2k^2 - 3k + 1 \end{pmatrix} \right).$$

- (A) (2 punti) Trovare equazioni parametriche per E .
- (B) (2 punti) Trovare equazioni cartesiane di F_k per $k = 0$.
- (C) (2 punti) Al variare di k determinare la dimensione di F_k .
- (D) (2 punti) Determinare i valori di k per i quali E ed F_k si intersecano e descrivere la loro intersezione.
- (E) (2 punti) Stabilire se esistono valori di k per i quali E ed F_k hanno la stessa dimensione e sono paralleli tra loro.
- (F) (2 punti) Per ogni k determinare la dimensione di $E + F_k$.

2. Considerare la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ data da $f(x) = A \cdot x$

e i vettori $v_1 = 5e_1 + 2e_2 + e_3$, $v_2 = 3e_1 + e_2 + e_3$, $v_3 = -2e_1 - 3e_2 + 5e_3$ in \mathbb{R}^3 .

- (A) (2 punti) Provare che $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ è una base di \mathbb{R}^3 .
- (B) (2 punti) Calcolare A^{-1} .
- (C) (4 punti) Determinare le matrici $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}_3}$, $[f]_{\mathcal{E}_3}^{\mathcal{B}}$ e $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$.
- AL (D) (4 punti) Stabilire se A sia diagonalizzabile.
- GAI (E) (4 punti) Stabilire quale tra v_1, v_2, v_3 formi l'angolo maggiore con la retta ortogonale al piano generato dagli altri due.



Risposte esatte

5. \diamond

1. No: coincide con $x = 19 + 6\sqrt{2}$. Se fosse razionale lo sarebbe $\frac{1}{6}(x - 19) = \sqrt{2}$, che invece non lo è

2. Ad esempio con $2ie_1 + e_2, e_3 - ie_4$

3. $x = -2, y = 3, z = -1$

4. $7 + 5i$

5. Tra $n - 1$ e $2n - 1$

6. 3

AL 7. No, ha autovalori 1 e 2, ma $m.a.(2) = 2$ e $m.g.(2) = 1$

GAI 8. Iperbole

1. \spadesuit 2. \heartsuit 3. \spadesuit 4. \clubsuit 5. \diamond 6. \spadesuit 7. \clubsuit 8. \heartsuit 9. \clubsuit 10. \diamond
