



Algebra Lineare — Scritto del 2/7/09 — Quesiti

Nome _____ Cognome _____ Matricola _____

1. Con le consuete operazioni di somma e prodotto tra polinomi, lo spazio $\mathbb{R}[t]$ costituisce un campo?
2. Avendo un sistema di 7 generatori di $X = \{x \in \mathbb{R}^5 : x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 0\}$, quanti bisogna scartarne per avere una base di X ?

3. Risolvere
$$\begin{cases} 3x + 2y - 2z = 1 \\ -2x + 5y + 3z = -15 \\ 4x + 3y + 5z = -7. \end{cases}$$

4. Data $A \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{C})$ scritta come $A = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}$ e tale che $\det(A) = -i$, calcolare $\det(v_1 + iv_2 \quad v_1 - iv_3 \quad 2iv_2 + v_3)$.

5. Se $f : \mathbb{R}^7 \rightarrow \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 = x_3 + x_4\}$ è lineare e surgettiva, che dimensione può avere $W \subset \mathbb{R}^7$ tale che $W \cap \text{Ker}(f) = \{0\}$?

6. Nella matrice $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ considerare la sottomatrice $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ e calcolare i determinanti delle sue orlate.

- AL 7. Trovare gli autovalori di $\begin{pmatrix} 2-i & 1+i \\ 2(1+i) & 2i-1 \end{pmatrix}$ e una base che la diagonalizzi.

- GAI 8. Classificare la conica $2x^2 - 6xy + 5y^2 + 2x - 4y + 2 = 0$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♥ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♦ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♥ 9. ♣ 10. ♦



1. Al variare di k in $\mathbb{C}$ si consideri in $\mathbb{C}^3$ il sottospazio affine

$$E_k = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 2ik \end{pmatrix} + \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 2-i \\ i \\ 1+2i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3+k \\ k(1+i) \\ 3k-1 \end{pmatrix} \right).$$

(A) (4 punti) Si calcoli la dimensione di E_k per ogni k .

(B) (4 punti) Per $k = 0$ si trovino equazioni cartesiane di E_k .

(C) (4 punti) Si determini k affinché E_k passi per il punto $\begin{pmatrix} 0 \\ 2i \\ 5 \end{pmatrix}$.

2. Sia $A = \begin{pmatrix} -6 & 4 & 0 \\ 6 & 1 & -3 \\ -42 & 18 & 6 \end{pmatrix}$ e si indichi di nuovo con A l'associata applicazione lineare da $\mathbb{R}^3$ in sé stesso.

(A) (4 punti) Posto $R = \text{Im}(A)$ e $K = \text{Ker}(A)$ si trovino basi di R e di K verificando la formula della dimensione.

(B) (4 punti) Si provi che $A(R) \subset R$, si indichi con $g : R \rightarrow R$ l'applicazione lineare data da $g(x) = A \cdot x$ per ogni $x \in R$, e si determini la matrice associata a g rispetto alla base di R trovata nel punto precedente.

AL (C) (4 punti) Si provi che g è diagonalizzabile e si trovi una base di R che la diagonalizza.

GAI (D) (4 punti) Si calcoli l'angolo formato da R e K . [Suggerimento: si consideri la retta ortogonale a quello che tra R e K è un piano.]



Risposte esatte

5. $\diamond$

1. No, i polinomi di grado positivo non hanno inverso

2. 3

3. $x = 1$, $y = -2$, $z = -1$ 4. $2i - 1$

5. Tra 0 e 3

6. 16 e 5

7. 1 e i ; $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ 2i \end{pmatrix}$

8. Insieme vuoto

1. $\spadesuit$ 2. $\heartsuit$ 3. $\spadesuit$ 4. $\clubsuit$ 5. $\diamond$ 6. $\spadesuit$ 7. $\clubsuit$ 8. $\heartsuit$ 9. $\clubsuit$ 10. $\diamond$