UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria — Corso di Laurea in Ingegneria Civile, dell'Ambiente e del Territorio

Geometria e Algebra II — Scritto del 25/09/08 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ␣␣␣␣␣␣

1. Una divisione in $\mathbb{R}[x]$ può avere x^3 sia come quoziente sia come resto?

2. Dato $X = \{x \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0\}$ e la sua base $\mathcal{B} = (e_1 + 2e_2 - 2e_3, 2e_1 + 2e_2 - e_3)$ calcolare $[3e_1 + 2e_2]_{\mathcal{B}}$.

3. La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ ha tre autovalori reali positivi?

4. Se $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ è lineare, $f(e_1 + e_2) = e_1 + 2e_2$ e $f(e_1 - e_2) = 2e_1 + e_2$, quanto vale $f^{-1}(e_1)$?

5. Trovare una base che diagonalizza la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$.

6. Se A è una matrice ortogonale reale 3×3, esistono sempre $\vartheta \in \mathbb{R}$ e X matrice ortogonale reale 3×3 tali che $X^{-1}AX$ sia una rotazione di angolo ϑ in un piano opportuno?

7. La retta proiettiva in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ passante per i punti $[2 : 1 : -5]$ e $[3 : -2 : 7]$ contiene il punto $[1 : 0 : 0]$?

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Geometria e Algebra II — Scritto del 25/09/08 — Esercizî

1. Siano $V = \{z \in \mathbb{C}^3 : (1+i)z_1 + (2-i)z_2 - iz_3 = 0\}$, $v_1 = \begin{pmatrix} 1+i \\ 1-i \\ -1-i \end{pmatrix}$ e $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3i \end{pmatrix}$.

(A) (4 punti) Verificare che $v_1 \in V$ e completare v_1 a una base $\mathcal{B}$ di V tramite vettori che abbiano le componenti distinte tra loro e ciascuna non reale.

(B) (4 punti) Verificare che $w \in V$ e calcolare $[w]_{\mathcal{B}}$.

(C) (4 punti) Determinare tutti i vettori di V unitari, ortogonali a w ed aventi seconda coordinata immaginaria pura.

2. Siano $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ data da $f(x) = A \cdot x$, $\mathcal{B} = (e_1 - e_3, e_2 - 4e_3, e_2 - 3e_3)$ e $\mathcal{C} = (3e_1 + 2e_3, e_1 + e_3, -e_1 + e_2)$.

(A) (4 punti) Verificare che $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ sono basi di $\mathbb{R}^3$.

(B) (4 punti) Determinare $B = [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$.

(C) (4 punti) Verificare che $A + B$ è simmetrica e determinare il tipo affine della conica ad essa associata.

Risposte esatte

5. $\diamondsuit$

1. Sì, ad esempio $(x^7 + x^3) : x^4$

2. $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

3. No, il determinante vale -8

4. $\frac{1}{3}e_1 - e_2$

5. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

6. No, se A rappresenta una riflessione rispetto a un piano

7. No

1. $\spadesuit$ 2. $\heartsuit$ 3. $\spadesuit$ 4. $\clubsuit$ 5. $\diamondsuit$ 6. $\spadesuit$ 7. $\clubsuit$ 8. $\heartsuit$ 9. $\clubsuit$ 10. $\diamondsuit$