UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria — Corso di Laurea in Ingegneria Civile, dell'Ambiente e del Territorio

Geometria e Algebra II — Scritto del 31/1/08 — Quesiti

**Nome** _____ **Cognome** _____ **Matricola** _____

**1.** Se una proposizione $\mathcal{P}(n)$ dipendente da $n \in \mathbb{N}$ è vera per $n = 0, 1$ e inoltre $\mathcal{P}(n)$ implica $\mathcal{P}(n+3)$, si può concludere che la proposizione vale sempre?

**2.** Se $\mathcal{B} = (2e_1 + e_3,\ 3e_1 + e_2 + 2e_3,\ e_1 - 2e_2)$, che coordinate ha $-e_1 + 5e_2 + e_3$ rispetto a $\mathcal{B}$?

**3.** Può una matrice $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ avere gli autovalori complessi $-1, 1+3i, 1-3i$?

**4.** Se $A = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 0 & 1-i & 1 \\ 2+i & -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$, quanto fa $(A)_{23} + (A)_{31}$?

**5.** È diagonalizzabile la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$?

**6.** È ortogonale la matrice $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & -3 & -\sqrt{6} \\ -3 & -1 & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & -\sqrt{6} & -2 \end{pmatrix}$?

**7.** I punti di coordinate omogenee $[-1 : 1/\sqrt{6} : \sqrt{2}]$ e $[\sqrt{2} : -1/\sqrt{3} : 2]$ coincidono nel piano proiettivo reale?

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♣ 2. ♢ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♡ 6. ♡ 7. ♠ 8. ♡ 9. ♠ 10. ♠

# Geometria e Algebra II — Scritto del 31/1/08 — Esercizî

**1.** Sia $V = \{z \in \mathbb{C}^3 : 2z_1 + 2iz_2 + (i-1)z_3 = 0\}$.

(A) (3 punti) Verificare che $v_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1-i \\ 1 \\ 1+i \end{pmatrix}$ è unitario e appartiene a $V$.

(B) (3 punti) Completare $v_1$ a una base ortonormale $(v_1, v_2)$ di $V$.

(C) (3 punti) Determinare la proiezione ortogonale su $V$ di $w = \begin{pmatrix} i \\ 1+i \\ 1 \end{pmatrix}$.

(D) (3 punti) Trovare tutti i vettori $v_3$ tali che $(v_1, v_2, v_3)$ sia una base ortonormale di $\mathbb{C}^3$.

**2.** Sia $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ e sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ data da $f(x) = A \cdot x$.

(A) (3 punti) Trovare un vettore di $\mathbb{R}^4$ unitario, ortogonale a $f(e_1 + e_2 + e_3 + e_4)$ e che formi un angolo di $\pi/4$ con $e_1$.

(B) (3 punti) Se $\mathcal{B} = (e_1 + e_2, e_2 + e_3, e_3 + e_4, -e_2)$ e $B = [f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}$, determinare $(B)_{23}$.

(C) (3 punti) Determinare il tipo affine della quadrica cui è associata la matrice $A$.

(D) (3 punti) Per $i = 1, 2, 3$ determinare il tipo affine della quadrica $\{x \in \mathbb{R}^4 : x_i = 1, {}^{\mathrm{t}}x \cdot A \cdot x = 0\}$.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria. Dall'inizio della seconda ora si può usare anche un foglio manoscritto contenente enunciati e formule. Si può uscire solo in casi eccezionali. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La soluzione di ogni esercizio deve essere consecutiva su un solo foglio. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto di un esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.

# Risposte esatte

## 5. ♡

**1.** No

**2.** $(-1, 1, -2)$

**3.** Sì, ad esempio $\begin{pmatrix} 1 & -9 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

**4.** $1/2 + 2i$

**5.** No, ha il solo autovalore 1

**6.** No

**7.** No

1. ♣ 2. ♢ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♡ 6. ♡ 7. ♠ 8. ♡ 9. ♠ 10. ♠