UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria — Corso di Laurea in Ingegneria Civile, dell'Ambiente e del Territorio

Geometria e Algebra II — Scritto del 31/1/08 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ␣␣␣␣␣␣

1. Se una proposizione $\mathcal{P}(n)$ dipendente da $n \in \mathbb{N}$ è vera per $n = 0, 1$ e inoltre $\mathcal{P}(n)$ implica $\mathcal{P}(n+3)$, si può concludere che la proposizione vale sempre?

2. Se $\mathcal{B} = (2e_1 + e_3,\ 3e_1 + e_2 + 2e_3,\ e_1 - 2e_2)$, che coordinate ha $-e_1 + 5e_2 + e_3$ rispetto a $\mathcal{B}$?

3. Può una matrice $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ avere gli autovalori complessi $-1, 1+3i, 1-3i$?

4. Se $A = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 0 & 1-i & 1 \\ 2+i & -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$, quanto fa $(A)_{23} + (A)_{31}$?

5. È diagonalizzabile la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$?

6. È ortogonale la matrice $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & -3 & -\sqrt{6} \\ -3 & -1 & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & -\sqrt{6} & -2 \end{pmatrix}$?

7. I punti di coordinate omogenee $[-1 : 1/\sqrt{6} : \sqrt{2}]$ e $[\sqrt{2} : -1/\sqrt{3} : 2]$ coincidono nel piano proiettivo reale?

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♣ 2. ♢ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♡ 6. ♡ 7. ♠ 8. ♡ 9. ♠ 10. ♠

Geometria e Algebra II — Scritto del 31/1/08 — Esercizî

1. Sia $V = \{z \in \mathbb{C}^3 : \ 2z_1 + 2iz_2 + (i-1)z_3 = 0\}$.

(A) (3 punti) Verificare che $v_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1-i \\ 1 \\ 1+i \end{pmatrix}$ è unitario e appartiene a V.

(B) (3 punti) Completare v_1 a una base ortonormale (v_1, v_2) di V.

(C) (3 punti) Determinare la proiezione ortogonale su V di $w = \begin{pmatrix} i \\ 1+i \\ 1 \end{pmatrix}$.

(D) (3 punti) Trovare tutti i vettori v_3 tali che (v_1, v_2, v_3) sia una base ortonormale di $\mathbb{C}^3$.

2. Sia $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ e sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ data da $f(x) = A \cdot x$.

(A) (3 punti) Trovare un vettore di $\mathbb{R}^4$ unitario, ortogonale a $f(e_1 + e_2 + e_3 + e_4)$ e che formi un angolo di $\pi/4$ con e_1.

(B) (3 punti) Se $\mathcal{B} = (e_1 + e_2, e_2 + e_3, e_3 + e_4, -e_2)$ e $B = [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$, determinare $(B)_{23}$.

(C) (3 punti) Determinare il tipo affine della quadrica cui è associata la matrice A.

(D) (3 punti) Per $i = 1, 2, 3$ determinare il tipo affine della quadrica $\{x \in \mathbb{R}^4 : \ x_i = 1, \ {}^{t}x \cdot A \cdot x = 0\}$.

UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria — Corso di Laurea in Ingegneria Civile, dell'Ambiente e del Territorio

Geometria e Algebra II — Scritto del 31/1/08 — Quesiti

Risposte esatte

5. ♡

1. No

2. $(-1, 1, -2)$

3. Sì, ad esempio $\begin{pmatrix} 1 & -9 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

4. $1/2 + 2i$

5. No, ha il solo autovalore 1

6. No

7. No

1. ♣ 2. ♢ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♡ 6. ♡ 7. ♠ 8. ♡ 9. ♠ 10. ♠