



 Geometria e Algebra II — Scritto del 31/1/08 — Quesiti

Nome _____ Cognome _____ Matricola _____

1. Se una proposizione $\mathcal{P}(n)$ dipendente da $n \in \mathbb{N}$ è vera per $n = 0, 1$ e inoltre $\mathcal{P}(n)$ implica $\mathcal{P}(n+2)$, si può concludere che la proposizione vale sempre?

2. Se $\mathcal{B} = (2e_1 + 3e_2 + e_3, e_2 - 2e_3, e_1 + 2e_2)$, che coordinate ha $-e_1 + e_2 - 4e_3$ rispetto a $\mathcal{B}$?

3. Può una matrice $A \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ avere gli autovalori complessi $1 - 3i$ con molteplicità algebrica 1 e $1 + 3i$ con molteplicità algebrica 2?

4. Se $A = \begin{pmatrix} -1 & i & 0 \\ 0 & 1+i & 1 \\ 2-i & -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$, quanto fa $(A)_{21} + (A)_{33}$?

5. È diagonalizzabile la matrice $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 6 & -1 & 2 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$?

6. È ortogonale la matrice $\frac{1}{8} \begin{pmatrix} 6 + \sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 2\sqrt{3} - \sqrt{6} \\ 2\sqrt{2} & -4\sqrt{2} & -2\sqrt{6} \\ 2\sqrt{3} - \sqrt{6} & -2\sqrt{6} & 2 + 3\sqrt{2} \end{pmatrix}$?

7. I punti di coordinate omogenee $[\sqrt{2} : -1 : \sqrt{3/2}]$ e $[-2 : \sqrt{2} : -\sqrt{3}]$ coincidono nel piano proiettivo reale?

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

 1. ♣ 2. ♦ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♥ 6. ♥ 7. ♠ 8. ♥ 9. ♣ 10. ♠



1. Sia $V = \{z \in \mathbb{C}^3 : 2z_1 + 2iz_2 + (i-1)z_3 = 0\}$.

(A) (3 punti) Verificare che $v_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1-i \\ 1 \\ 1+i \end{pmatrix}$ è unitario e appartiene a V .

(B) (3 punti) Completare v_1 a una base ortonormale (v_1, v_2) di V .

(C) (3 punti) Determinare la proiezione ortogonale su V di $w = \begin{pmatrix} i \\ 1+i \\ 1 \end{pmatrix}$.

(D) (3 punti) Trovare tutti i vettori v_3 tali che (v_1, v_2, v_3) sia una base ortonormale di $\mathbb{C}^3$.

2. Sia $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ e sia $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ data da $f(x) = A \cdot x$.

(A) (3 punti) Trovare un vettore di $\mathbb{R}^4$ unitario, ortogonale a $f(e_1 + e_2 + e_3 + e_4)$ e che formi un angolo di $\pi/4$ con e_1 .

(B) (3 punti) Se $\mathcal{B} = (e_1 + e_2, e_2 + e_3, e_3 + e_4, -e_2)$ e $B = [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$, determinare $(B)_{23}$.

(C) (3 punti) Determinare il tipo affine della quadrica cui è associata la matrice A .

(D) (3 punti) Per $i = 1, 2, 3$ determinare il tipo affine della quadrica $\{x \in \mathbb{R}^4 : x_i = 1, {}^t x \cdot A \cdot x = 0\}$.



Risposte esatte

5. $\diamond$

1. Sì
2. $(-2, 1, 3)$
3. No
4. $-1 - i/2$
5. Sì, ha autovalori $1, -1, 2$
6. Sì
7. Sì

1. $\clubsuit$	2. $\diamond$	3. $\spadesuit$	4. $\clubsuit$	5. $\heartsuit$	6. $\heartsuit$	7. $\spadesuit$	8. $\heartsuit$	9. $\clubsuit$	10. $\spadesuit$
----------------	---------------	-----------------	----------------	-----------------	-----------------	-----------------	-----------------	----------------	------------------
