



 Geometria e Algebra II — Scritto del 30/6/08 — Quesiti

Nome _____ Cognome _____ Matricola _____

1. Come si comporta il grado rispetto al prodotto tra polinomi non nulli?

2. Rispetto a quale base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^2$ si ha che $\left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2x_1 + 5x_2 \\ x_1 + 3x_2 \end{pmatrix}$ per ogni $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$?

3. Calcolare somma e prodotto degli autovalori della matrice $\begin{pmatrix} 1+i & -3 & 1 \\ 0 & 2+i & 3 \\ -1 & 1-i & -2 \end{pmatrix}$.

4. Se $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, quanto vale $(A^{-1})_{31}$?

5. Per quali k è diagonalizzabile la matrice $\begin{pmatrix} 2k & 0 & 0 \\ k^3 & 4 & 0 \\ 3k & 1+k & k^2 \end{pmatrix}$?

6. Se $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$ e ${}^t A \cdot A = I_n$, gli autovalori di A hanno per forza modulo 1?

7. Se le coordinate omogenee $[x_0 : x_1 : x_2 : x_3]$ di un punto di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ soddisfano la relazione $x_0 x_1^2 = x_2^2 x_3^2$, la stessa relazione vale per qualsiasi altra scelta di coordinate omogenee dello stesso punto?

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

 1. ♠ 2. ♥ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♥ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♥ 9. ♣ 10. ◇



1. In $\mathbb{C}^4$ si considerino i sottospazi

$$X = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 3-i \\ i \\ -i \\ 2+i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1-2i \\ 1+i \\ 1-i \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3-i \\ 1+2i \\ 3-2i \\ 1+2i \end{pmatrix} \right),$$

$$Y = \left\{ z \in \mathbb{C}^4 : -z_1 + iz_2 + (1-i)z_3 + (2-i)z_4 = 0 \right\}.$$

- (A) (4 punti) Si verifichi che $X \subset Y$, si estragga una base di X dai generatori assegnati e la si completi a una base di Y
- (B) (4 punti) Si calcolino le norme degli elementi della base di X trovata al punto precedente e i prodotti scalari di ciascuno degli elementi di tale base con ciascuno degli altri.
- (C) (4 punti) Si esibisca la proiezione ortogonale su Y .

2. Si considerino il sottospazio X di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ data da

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_2 + x_3 + 4x_4 \\ x_2 - x_4 \\ x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 + x_3 \end{pmatrix}.$$

- (A) (4 punti) Si esibiscano una base di X e una sua presentazione cartesiana.
- (B) (4 punti) Si provi che $f(X) \subset X$ e si esibisca la matrice A rispetto alla base del punto precedente dell'applicazione lineare da X in X data dalla restrizione di f .
- (C) (4 punti) Si determini il tipo affine della conica associata alla matrice $A + {}^tA$.



Risposte esatte

5. ♥

1. Il grado del prodotto è la somma dei gradi dei due fattori

2. $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$

3. $1 + 2i, 3 - 5i$

4. $\frac{2}{3}$

5. $k \neq 2, k \neq -2$

6. No, ad esempio $\begin{pmatrix} \sqrt{2} & i \\ -i & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ ha autovalori $\sqrt{2} \pm 1$

7. No

1. ♠ 2. ♥ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♥ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♥ 9. ♣ 10. ♦