UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria — Corso di Laurea in Ingegneria Civile, dell'Ambiente e del Territorio

Geometria e Algebra II — Scritto del 30/6/08 — Quesiti

Nome _____ **Cognome** _____ **Matricola** ␣␣␣␣␣␣

1. Come si comporta il grado rispetto alla somma tra due polinomi non nulli?

2. Rispetto a quale base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^2$ si ha che $\left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 \\ -3x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}$ per ogni $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$?

3. Calcolare somma e prodotto degli autovalori della matrice $\begin{pmatrix} i & 1+i & 0 \\ -1 & 2-i & 3 \\ -2 & 1+2i & 1 \end{pmatrix}$.

4. Se $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, quanto vale $(A^{-1})_{32}$?

5. Per quali k è diagonalizzabile la matrice $\begin{pmatrix} 2k & 1-k & k \\ 0 & k^2 & k+2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$?

6. Se $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ e ${}^tA + A = 0$, gli autovalori di A sono per forza immaginari puri?

7. Se le coordinate omogenee $[x_0 : x_1 : x_2 : x_3]$ di un punto di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ soddisfano la relazione $x_0x_1x_2 = x_3^3$, la stessa relazione vale per qualsiasi altra scelta di coordinate omogenee dello stesso punto?

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria — Corso di Laurea in Ingegneria Civile, dell'Ambiente e del Territorio

Geometria e Algebra II — Scritto del 30/6/08 — Esercizî

1. In $\mathbb{C}^4$ si considerino i sottospazi

$$X = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 3-i \\ i \\ -i \\ 2+i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-2i \\ 1+i \\ 1-i \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3-i \\ 1+2i \\ 3-2i \\ 1+2i \end{pmatrix}\right),$$

$$Y = \Big\{ z \in \mathbb{C}^4 : \ -z_1 + iz_2 + (1-i)z_3 + (2-i)z_4 = 0 \Big\}.$$

(A) (4 punti) Si verifichi che $X \subset Y$, si estragga una base di X dai generatori assegnati e la si completi a una base di Y

(B) (4 punti) Si calcolino le norme degli elementi della base di X trovata al punto precedente e i prodotti scalari di ciascuno degli elementi di tale base con ciascuno degli altri.

(C) (4 punti) Si esibisca la proiezione ortogonale su Y.

2. Si considerino il sottospazio X di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ data da

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_2 + x_3 + 4x_4 \\ x_2 - x_4 \\ x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 + x_3 \end{pmatrix}.$$

(A) (4 punti) Si esibiscano una base di X e una sua presentazione cartesiana.

(B) (4 punti) Si provi che $f(X) \subset X$ e si esibisca la matrice A rispetto alla base del punto precedente dell'applicazione lineare da X in X data dalla restrizione di f.

(C) (4 punti) Si determini il tipo affine della conica associata alla matrice $A + {}^tA$.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria. Dall'inizio della seconda ora si può usare anche un foglio manoscritto contenente enunciati e formule. Si può uscire solo in casi eccezionali. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La soluzione di ogni esercizio deve essere consecutiva su un solo foglio. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto di un esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.

UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria — Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, dell'Ambiente e del Territorio

Geometria e Algebra II — Scritto del 30/6/08 — Quesiti

Risposte esatte

5. ♢

1. Il grado della somma è il massimo dei gradi dei due addendi se questi gradi sono diversi tra loro, minore o uguale se sono uguali

2. $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

3. $3,\ 2-6i$

4. $-\frac{1}{3}$

5. $k \neq 0,\ k \neq 2$

6. No, ad esempio $\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$ ha autovalori ± 1

7. Sì

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢