UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria — Corso di Laurea in Ingegneria Civile, dell'Ambiente e del Territorio

Geometria e Algebra II — Scritto del 30/1/09 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ______

1. Se $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$, $\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ e $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, trovare $[v]_{\mathcal{B}'}$.

2. Per quali $k \in \mathbb{R}$ è diagonalizzabile la matrice $\begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ k+2 & -1 & 0 \\ 1 & -k & k^2 \end{pmatrix}$?

3. Determinare il tipo affine della conica $3x^2 - 2\sqrt{3}xy + y^2 + x = 0$.

4. Determinare un vettore di $\mathbb{C}^2$ unitario, ortogonale a $\begin{pmatrix} 1+i \\ 2-i \end{pmatrix}$ e avente prima coordinata immaginaria pura.

5. Può essere invertibile una matrice $n \times n$ antisimmetrica reale?

6. Determinare il tipo affine della quadrica $x^2 - y^2 - 2xz + 4yz - 5z^2 + 2y - 4 = 0$.

7. Dati $w_1, w_2, w_3, w_4 \in W = \left\{ z \in \mathbb{C}^8 : \sum_{n=1}^{8} i^n z_n = 0 \right\}$, si cerca di costruire una base di W formata formata dal massimo numero possibile dei w_j e da altri vettori. Quanti nuovi bisogna sceglierne?

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♣ 2. ♡ 3. ♡ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♠ 9. ♠ 10. ♢

Geometria e Algebra II — Scritto del 30/1/09 — Esercizî

1. Al variare di k in $\mathbb{R}$ considerare le applicazioni lineari $f_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tali che

$$f_k\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k \\ 0 \\ k+2 \end{pmatrix}, \qquad f_k\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-k \\ 2 \\ 1-2k \end{pmatrix}, \qquad f_k\begin{pmatrix} 0 \\ k \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ k \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(A) (3 punti) Per ogni $k \in \mathbb{R}$ determinare quante siano tali f_k;

(B) (3 punti) Per $k = 1$ verificare che f_k esiste ed è unica e determinare $[f_1]_{\mathcal{E}_3}^{\mathcal{E}_3}$;

(C) (3 punti) Per ogni $k \in \mathbb{R}$ tale che f_k esista e sia unica stabilire se è diagonalizzabile;

(D) (3 punti) Per $k = 0$ ortonormalizzare la base di $\mathbb{R}^3$ data dai vettori sui quali è assegnata f_0 e trovare un vettore non nullo ortogonale all'immagine di f_0.

2. Al variare di k in $\mathbb{C}$ considerare la matrice $\begin{pmatrix} k-1-i & 2-i & -1-2i \\ k-1-2i & 2+ik & k-1-2i \\ -ik-2+i & (1+i)k-(1+2i) & (1-i)k+2(i-1) \end{pmatrix}$.

(A) (4 punti) Stabilire per quali k non è invertibile.

(B) (4 punti) Per $k = 0$ provare che è invertibile e determinare i coefficienti di posti $(1,2)$ e $(3,1)$ dell'inversa.

(C) (4 punti) Per $k = 1+i$ trovare equazioni parametriche del sottospazio affine di $\mathbb{C}^3$ definito dall'equazione $A_{(1+i)} \cdot z = \begin{pmatrix} 2+4i \\ -1+i \\ -1-2i \end{pmatrix}$.

Risposte esatte

9. ♠

1. $\begin{pmatrix} 11 \\ 7 \end{pmatrix}$

2. $k \neq 0, 1, -1$

3. Parabola

4. $\frac{1}{\sqrt{35}}\begin{pmatrix} -5i \\ 3-i \end{pmatrix}$ o il suo opposto

5. Sì se n è pari, no se n è dispari

6. Iperboloide a due falde

7. $7-\dim(\mathrm{Span}(w_1, w_2, w_3, w_4))$, dunque tra 3 e 7

1. ♣ 2. ♡ 3. ♡ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♠ 9. ♠ 10. ♢