



Geometria e Algebra II — Scritto del 20/2/09 — Quesiti

Nome _____ Cognome _____ Matricola _____

1. Completare $e_1 - e_2 - e_3$ a una base di $\{x \in \mathbb{R}^4 : 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 0\}$.
2. Completare $ie_1 - e_2 + e_3$ a una base ortogonale di $\{w \in \mathbb{C}^3 : (1 + 2i)w_1 + iw_2 + 2w_3 = 0\}$.
3. Determinare $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ dove $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ è lineare, $f(e_1) = 2e_1 - 3e_2$, $f(e_2) = 3e_1 + 7e_2$ e $\mathcal{B} = (3e_1 - e_2, -5e_1 + 2e_2)$.
4. Data $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ calcolare $(A^{-1})_{32}$.
5. Determinare il tipo affine della quadrica di equazione $2x^2 + y^2 + 5z^2 + 2xy + 2xz - 2yz - 2y = 0$.
6. Risolvere $3z^2 + (3i - 5)z + 2(1 - i) = 0$ con $z \in \mathbb{C}$.
7. Determinare una base di $\mathbb{R}^2$ che diagonalizzi $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♥ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♥ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♥ 9. ♣ 10. ◇



1. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ considerare la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 2(2-5k) & 2(1-3k) & k+1 \\ 6(3k-1) & 11k-3 & k \\ 0 & 0 & 1+k^2 \end{pmatrix}$.

(A) (2 punti) Trovare due numeri $k_1 < k_2$ tali che per $k \neq k_{1,2}$ il sistema lineare $A_k \cdot x = b$ abbia un'unica soluzione $x \in \mathbb{R}^3$ per ogni $b \in \mathbb{R}^3$.

(B) (2 punti) Per $k = k_1$ risolvere il sistema $A_{k_1} \cdot x = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(C) (2 punti) Per $k = k_2$ risolvere il sistema $A_{k_2} \cdot x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(D) (4 punti) Discutere la diagonalizzabilità di A_k al variare di k .

(E) (2 punti) Per $k = 0$ determinare gli angoli formati dalle tre possibili coppie di colonne della matrice $A_0 + {}^t A_0$.

2. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ considerare la matrice $M_k = \begin{pmatrix} 3(k+1) - ik & k+2+i \\ 3k+2-i(2k+1) & -(k+1) - ik \end{pmatrix}$.

(A) (4 punti) Stabilire per quali k la M_k è hermitiana e per quali è antihermitiana.

(B) (3 punti) Per i k tali che M_k è hermitiana trovarne gli autovalori ed esibire una base ortonormale di $\mathbb{C}^2$ che la diagonalizzi.

(C) (3 punti) Per i k tali che M_k è antihermitiana trovarne gli autovalori ed esibire una base ortonormale di $\mathbb{C}^2$ che la diagonalizzi.

(D) (2 punti) Stabilire se esistano valori di k per i quali un multiplo scalare di M_k è una matrice unitaria.



Risposte esatte

5. ♥

1. Ad esempio con $3e_1 + 2e_2, 4e_3 - 5e_4$ 2. Aggiungere $(1 - 2i)e_1 + (i - 4)e_2 + 2(i - 1)e_3$ 3. $\begin{pmatrix} -74 & 137 \\ -45 & 83 \end{pmatrix}$ 4. $\frac{4}{5}$

5. Paraboloide ellittico

6. $z = \frac{2}{3}, z = 1 - i$ 7. $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right)$

1. ♠ 2. ♥ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♥ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♥ 9. ♣ 10. ◇