



Geometria e Algebra II — Scritto del 20/2/09 — Quesiti

Nome \_\_\_\_\_ Cognome \_\_\_\_\_ Matricola \_\_\_\_\_

1. Completare  $e_1 + e_2 - e_4$  a una base di  $\{x \in \mathbb{R}^4 : 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 5x_4 = 0\}$ .
2. Completare  $e_1 + e_2 + ie_3$  a una base ortogonale di  $\{z \in \mathbb{C}^3 : 2z_1 - iz_2 + (1 + 2i)z_3 = 0\}$ .
3. Determinare  $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$  dove  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  è lineare,  $f(e_1) = 3e_1 - 2e_2$ ,  $f(e_2) = -e_1 + 4e_2$  e  $\mathcal{B} = (4e_1 - 3e_2, -3e_1 + 2e_2)$ .
4. Data  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$  calcolare  $(A^{-1})_{23}$ .
5. Determinare il tipo affine della quadrica di equazione  $x^2 + 3y^2 - 3z^2 + 4xy - 2xz - 2x - 2y + 1 = 0$ .
6. Risolvere  $2z^2 - (7 + 2i)z + 3(2 + i) = 0$  con  $z \in \mathbb{C}$ .
7. Determinare una base di  $\mathbb{R}^2$  che diagonalizzi  $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 7 & -5 \end{pmatrix}$ .

**Le risposte devono essere sinteticamente giustificate**

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♥ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♦ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♥ 9. ♣ 10. ♦



1. Al variare di  $k \in \mathbb{R}$  considerare la matrice  $A_k = \begin{pmatrix} 2(2-5k) & 2(1-3k) & k+1 \\ 6(3k-1) & 11k-3 & k \\ 0 & 0 & 1+k^2 \end{pmatrix}$ .

(A) (2 punti) Trovare due numeri  $k_1 < k_2$  tali che per  $k \neq k_{1,2}$  il sistema lineare  $A_k \cdot x = b$  abbia un'unica soluzione  $x \in \mathbb{R}^3$  per ogni  $b \in \mathbb{R}^3$ .

(B) (2 punti) Per  $k = k_1$  risolvere il sistema  $A_{k_1} \cdot x = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

(C) (2 punti) Per  $k = k_2$  risolvere il sistema  $A_{k_2} \cdot x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

(D) (4 punti) Discutere la diagonalizzabilità di  $A_k$  al variare di  $k$ .

(E) (2 punti) Per  $k = 0$  determinare gli angoli formati dalle tre possibili coppie di colonne della matrice  $A_0 + {}^t A_0$ .

2. Al variare di  $k \in \mathbb{R}$  considerare la matrice  $M_k = \begin{pmatrix} 3(k+1) - ik & k+2+i \\ 3k+2-i(2k+1) & -(k+1) - ik \end{pmatrix}$ .

(A) (4 punti) Stabilire per quali  $k$  la  $M_k$  è hermitiana e per quali è antihermitiana.

(B) (3 punti) Per i  $k$  tali che  $M_k$  è hermitiana trovarne gli autovalori ed esibire una base ortonormale di  $\mathbb{C}^2$  che la diagonalizzi.

(C) (3 punti) Per i  $k$  tali che  $M_k$  è antihermitiana trovarne gli autovalori ed esibire una base ortonormale di  $\mathbb{C}^2$  che la diagonalizzi.

(D) (2 punti) Stabilire se esistano valori di  $k$  per i quali un multiplo scalare di  $M_k$  è una matrice unitaria.



## Risposte esatte

5.  $\diamond$ 1. Ad esempio con  $2e_1 - 3e_2, 5e_3 + 4e_4$ 2. Aggiungere  $2(i-1)e_1 + (4-i)e_2 + (1-2i)e_3$ 3.  $\begin{pmatrix} 30 & -20 \\ 35 & -23 \end{pmatrix}$ 4.  $-\frac{7}{11}$ 

5. Paraboloide iperbolico

6.  $z = \frac{3}{2}, z = 2 + i$ 7.  $\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix} \right)$ 1.  $\spadesuit$  2.  $\heartsuit$  3.  $\spadesuit$  4.  $\clubsuit$  5.  $\diamond$  6.  $\spadesuit$  7.  $\clubsuit$  8.  $\heartsuit$  9.  $\clubsuit$  10.  $\diamond$