Geometria e Algebra II — Scritto del 18/7/08 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ␣␣␣␣␣␣

1. Risolvere $2iz^2 + (3-2i)z - (1+i) = 0$.

2. Completare $e_1 + e_2 + 5e_3 + e_4$ a una base di $\{x \in \mathbb{R}^4 :\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 4x_4 = 0\}$.

3. Se $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 2+i \\ 5i-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1+2i \end{pmatrix} \right)$ e $f\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -iz_1 + z_2 \\ -z_1 + iz_2 \end{pmatrix}$, trovare $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$.

4. Se $\mathcal{B} = (e_1 - 2e_2, 3e_1 - 2e_2)$, $\mathcal{C} = (2e_1 + e_2, 3e_1 + 2e_2)$ e $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, determinare $[v]_{\mathcal{C}}$.

5. Determinare $v \in \mathbb{C}^2$ unitario, ortogonale a $\begin{pmatrix} 1-i \\ 1+i \end{pmatrix}$ e avente seconda coordinata reale positiva.

6. Determinare $D, X \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ con D diagonale e X ortogonale tali che $X^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot X = D$.

7. Determinare il tipo affine della quadrica di equazione $2x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 4yz + 6z = 0$.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria — Corso di Laurea in Ingegneria Civile, dell'Ambiente e del Territorio

Geometria e Algebra II — Scritto del 18/7/08 — Esercizî

1.

(A) (4 punti) Dato uno spazio vettoriale V e un'applicazione $f : V \to V$ lineare invertibile, si verifichi che f è diagonalizzabile se e solo se lo è la sua inversa.

(B) (4 punti) Nel caso $V = \mathbb{R}^3$ e f associata alla matrice $\begin{pmatrix} k^2-2 & 0 & 0 \\ 2(k+2) & 5-4k & 2(5-3k) \\ -3(k+2) & 2k-3 & 3k-6 \end{pmatrix}$, si discuta al variare di k l'invertibilità di f.

(C) (4 punti) Con la stessa f del punto precedente, si discuta la diagonalizzabilità.

2. Nel piano proiettivo reale si considerino i punti $A = [-1 : 1 : 1]$ e $B = [4 : -2 : 1]$.

(A) (4 punti) Si trovi un'equazione omogenea della retta proiettiva passante per A e B.

(B) (4 punti) Si verifichi che l'equazione $x^2 + 4y^2 - 2z^2 + 4xy + 2xz + 3yz = 0$ definisce una conica proiettiva Q non degenere passante per A e B.

(C) (4 punti) Si determinino i tipi affini della coniche ottenute intersecando Q con i piani $z = 1$, $y = 1$ e $x = 1$.

Risposte esatte

5. $\diamondsuit$

1. $z = \frac{i}{2}, \; z = 1 + i$

2. Ad esempio con $3e_1 + 2e_2, \; 4e_3 + e_4$

3. $\begin{pmatrix} 1+5i & 2+2i \\ 3-8i & -1-5i \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$

5. $v = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$

6. $D = \begin{pmatrix} 1+3\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1-3\sqrt{2} \end{pmatrix}, \; X = \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} \begin{pmatrix} 1 & 1-\sqrt{2} \\ \sqrt{2}-1 & 1 \end{pmatrix}$

7. Iperboloide a due falde

1. $\spadesuit$ 2. $\heartsuit$ 3. $\spadesuit$ 4. $\clubsuit$ 5. $\diamondsuit$ 6. $\spadesuit$ 7. $\clubsuit$ 8. $\heartsuit$ 9. $\clubsuit$ 10. $\diamondsuit$