UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria — Corso di Laurea in Ingegneria Civile, dell'Ambiente e del Territorio

Geometria e Algebra II — Scritto del 15/2/08 — Quesiti

Nome _____ **Cognome** _____ **Matricola** _____

1. Quali sono le radici complesse del polinomio $z^3 - 2z^2 - 2iz + 4i$?

2. Se $V = \left\{ x \in \mathbb{R}^6 : \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ -x_1 + 7x_2 + 10x_3 - 8x_4 + 5x_5 = 0 \end{cases} \right\}$
ed è possibile completare un insieme $A \subset V$ a una base di V, quanti elementi può avere A?

3. Se $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ è data da $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 \\ 3x_1 - 2x_2 \end{pmatrix}$ e $\mathcal{B} = (2e_1 + 5e_2,\ e_1 + 3e_2)$, trovare $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$.

4. Per quale base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{C}^2$ si ha $[z]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2z_1 - iz_2 \\ iz_1 + z_2 \end{pmatrix}$ per ogni $z \in \mathbb{C}^2$?

5. Quanti sono i vettori unitari con prima coordinata positiva e ortogonali a $\{x \in \mathbb{R}^3 :\ \pi x_1 - \sqrt{5}x_2 + 8x_3 = 0\}$?

6. Esiste una matrice ortogonale M tale che $M^{-1}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2\sqrt{2} \\ 1 & 0 & -4 \\ -2\sqrt{2} & 4 & 0 \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$?

7. Qual è il tipo affine della quadrica di equazione $2x^2 + 4y^2 - z^2 + 6xy - 2xz + 4yz - 4y + 2z = 0$?

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria — Corso di Laurea in Ingegneria Civile, dell'Ambiente e del Territorio

Geometria e Algebra II — Scritto del 15/2/08 — Esercizî

1. Al variare di k in $\mathbb{R}$ sia $A_k = \begin{pmatrix} k^2 & 0 & 0 \\ -1 & -3k^3+6k+2 & -6k^3+10k+4 \\ 0 & 2k^3-3k-1 & 4k^3-5k-2 \end{pmatrix}$.

(A) (3 punti) Calcolare la somma degli elementi sulla diagonale secondaria dell'inversa di A_1;

(B) (3 punti) Trovare una base del nucleo di A_0;

(C) (3 punti) Verificare che gli autovalori di A_k sono tutti potenze di k;

(D) (3 punti) Dire per quali k la A_k sia diagonalizzabile.

2. Al variare di k in $\mathbb{R}$ sia $A_k = \begin{pmatrix} -k & 1 & k \\ 1 & k-1 & 3-2k \\ k & 3-2k & 7k-4 \end{pmatrix}$ e sia $\mathcal{C}_k = \{[x] \in \mathbb{P}^2 : {}^t x \cdot A_k \cdot x = 0\}$.

(A) (3 punti) Trovare i valori di k per i quali la conica proiettiva è degenere;

(B) (3 punti) Determinare al variare di k il tipo affine della conica $\{[x] \in \mathcal{C}_k : \ x_3 = 1\}$;

(C) (3 punti) Trovare i valori di k per i quali la conica $\{[x] \in \mathcal{C}_k : \ x_1 = 1\}$ è una parabola;

(D) (3 punti) Determinare al variare di k il tipo affine della conica $\{[x] \in \mathcal{C}_k : \ x_2 = 1\}$.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria. Dall'inizio della seconda ora si può usare anche un foglio manoscritto contenente enunciati e formule. Si può uscire solo in casi eccezionali. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La soluzione di ogni esercizio deve essere consecutiva su un solo foglio. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto di un esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.

Risposte esatte

5. ♡

1. $2, 1+i, -1-i$

2. Tra 0 e 3

3. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$

4. $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 2 \end{pmatrix} \right)$

5. Uno solo

6. No

7. Iperboloide a una falda

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢