UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria — Corso di Laurea in Ingegneria Civile, dell'Ambiente e del Territorio

Geometria e Algebra II — Scritto del 15/2/08 — Quesiti

Nome ______________ **Cognome** ______________ **Matricola** ␣␣␣␣␣␣

1. Quali sono le radici complesse del polinomio $z^3 - z^2 + (3+4i)z - 3 - 4i$?

2. Se $V = \left\{ x \in \mathbb{R}^6 : \begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 + 4x_5 + 2x_6 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 + 3x_5 - x_6 = 0 \\ x_1 - 11x_2 + 7x_3 - 8x_4 + 6x_5 + 8x_6 = 0 \end{cases} \right\}$
e da un insieme $A \subset V$ si può estrarre una base di V, quanti elementi può avere A?

3. Se $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ è data da $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - 3x_2 \\ -x_1 + x_2 \end{pmatrix}$ e $\mathcal{B} = (4e_1 + 3e_2,\ 3e_1 + 2e_2)$, trovare $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$.

4. Per quale base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{C}^2$ si ha $[z]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} z_1 - iz_2 \\ iz_1 + 2z_2 \end{pmatrix}$ per ogni $z \in \mathbb{C}^2$?

5. Quanti sono i vettori di $\{x \in \mathbb{R}^3 :\ 3x_1 - \sqrt{3}x_2 + 2x_3\}$ con norma $\sqrt{5}$ e ortogonali a $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$?

6. Esiste una matrice ortogonale M tale che $M^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 2 & \sqrt{3} \\ -2 & 0 & -3 \\ -\sqrt{3} & 3 & 0 \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$?

7. Qual è il tipo affine della quadrica di equazione $x^2 + 3y^2 + 4xy - 2xz - 2yz - 4x - 3 = 0$?

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Geometria e Algebra II — Scritto del 15/2/08 — Esercizî

1. Al variare di k in $\mathbb{R}$ sia $A_k = \begin{pmatrix} k^2 & 0 & 0 \\ -1 & -3k^3+6k+2 & -6k^3+10k+4 \\ 0 & 2k^3-3k-1 & 4k^3-5k-2 \end{pmatrix}$.

(A) (3 punti) Calcolare la somma degli elementi sulla diagonale secondaria dell'inversa di A_1;

(B) (3 punti) Trovare una base del nucleo di A_0;

(C) (3 punti) Verificare che gli autovalori di A_k sono tutti potenze di k;

(D) (3 punti) Dire per quali k la A_k sia diagonalizzabile.

2. Al variare di k in $\mathbb{R}$ sia $A_k = \begin{pmatrix} -k & 1 & k \\ 1 & k-1 & 3-2k \\ k & 3-2k & 7k-4 \end{pmatrix}$ e sia $\mathcal{C}_k = \{[x] \in \mathbb{P}^2 : \ {}^{\mathrm{t}}x \cdot A_k \cdot x = 0\}$.

(A) (3 punti) Trovare i valori di k per i quali la conica proiettiva è degenere;

(B) (3 punti) Determinare al variare di k il tipo affine della conica $\{[x] \in \mathcal{C}_k : \ x_3 = 1\}$;

(C) (3 punti) Trovare i valori di k per i quali la conica $\{[x] \in \mathcal{C}_k : \ x_1 = 1\}$ è una parabola;

(D) (3 punti) Determinare al variare di k il tipo affine della conica $\{[x] \in \mathcal{C}_k : \ x_2 = 1\}$.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria. Dall'inizio della seconda ora si può usare anche un foglio manoscritto contenente enunciati e formule. Si può uscire solo in casi eccezionali. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La soluzione di ogni esercizio deve essere consecutiva su un solo foglio. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto di un esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.

UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria — Corso di Laurea in Ingegneria Civile, dell'Ambiente e del Territorio

Geometria e Algebra II — Scritto del 15/2/08 — Quesiti

Risposte esatte

5. $\diamondsuit$

1. $1, 1-2i, 2i-1$

2. Almeno 4

3. $\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

4. $\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

5. Due

6. Sì

7. Paraboloide iperbolico

1. $\spadesuit$ 2. $\heartsuit$ 3. $\spadesuit$ 4. $\clubsuit$ 5. $\diamondsuit$ 6. $\spadesuit$ 7. $\clubsuit$ 8. $\heartsuit$ 9. $\clubsuit$ 10. $\diamondsuit$