Geometria e Algebra II — Scritto del 14/1/08 — Quesiti

Nome ______________ **Cognome** ______________ **Matricola** ␣␣␣␣␣␣

1. Stabilire la molteplicità della radice $z = -i$ per il polinomio $z^6 + 2(i-1)z^5 - 2iz^4 - 2(1+i)z^3 + 7z^2 + 4(i-1)z - 2i$.

2. Se è possibile completare un insieme A di vettori a una base del sottospazio $X = \{x \in \mathbb{R}^6 : x_1 - 3x_2 + \pi x_3 - x_4 + 2x_5 - x_6 = 7x_1 + x_2 + x_3 - \sqrt{5}x_4 - 3x_5 - x_6 = 0\}$, quanti elementi può avere A?

3. Date le basi $\mathcal{B} = (e_1 + 2e_2, 3e_1 + e_2)$ e $\mathcal{C} = (-2e_1 + e_2, 5e_1 - 4e_2)$ di $\mathbb{R}^2$ e il vettore v tale che $[v]_\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, determinare $[v]_\mathcal{C}$.

4. Per una matrice quadrata A, sia $p_A(t)$ il suo polinomio caratteristico. Se A è 5×5, come sono legati i polinomi $f(t) = p_A(t/2)$ e $g(t) = p_{(2A)}(t)$?

5. Stabilire per quali $z \in \mathbb{C}$ si annulla il determinante della matrice $\begin{pmatrix} 0 & 2z-i & -3i \\ 1 & -1-i & 2 \\ 2 & -1-2z & 1 \end{pmatrix}$.

6. Dire se esista una base ortonormale di $\mathbb{C}^2$ costituita di autovettori della matrice $\begin{pmatrix} 1+i & 2-i \\ -2+i & 1 \end{pmatrix}$.

7. Determinare il tipo della conica di equazione $8x^2 + 14xy + 3y^2 + 8x + 2y + 1 = 0$.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria — Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, dell'Ambiente e del Territorio

Geometria e Algebra II — Scritto del 14/1/08 — Esercizî

1. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ siano date la matrice $A_k = \begin{pmatrix} k(3k-7) & k(k-3) & -1 \\ 3k(7-2k) & k(9-2k) & 2 \\ 0 & 0 & k+2 \end{pmatrix}$ e l'applicazione lineare $f_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da $f_k(x) = A_k \cdot x$.

(A) (2 punti) Determinare il rango di f_1;

(B) (3 punti) Scrivere la matrice che rappresenta f_1 rispetto alla base $\mathcal{B} = (e_1 + e_2, 2e_1 + e_3, e_2 - e_3)$ sia in partenza sia in arrivo;

(C) (3 punti) Provare che f_1 è diagonalizzabile ed esibire una base di $\mathbb{R}^3$ che la diagonalizza;

(D) (4 punti) Stabilire per quali k la f_k non è diagonalizzabile.

2. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ sia data la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 0 & k \\ k^2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & k & -1 \\ k & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

e considerare la funzione bilineare $f_k : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ associata ad A_k.

(A) (3 punti) Stabilire per quali k la f_k è simmetrica;

(B) (4 punti) Stabilire per quali k la f_k è un prodotto scalare;

(C) (5 punti) Nei casi in cui f_k è simmetrica ma non è un prodotto scalare, determinare il tipo affine della quadrica cui è associata la matrice A_k.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria. Dall'inizio della seconda ora si può usare anche un foglio manoscritto contenente enunciati e formule. Si può uscire solo in casi eccezionali. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La soluzione di ogni esercizio deve essere consecutiva su un solo foglio. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto di un esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.

UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria — Corso di Laurea in Ingegneria Civile, dell'Ambiente e del Territorio

Geometria e Algebra II — Scritto del 14/1/08 — Quesiti

Risposte esatte

5. ♡

1. 2

2. Al più 4

3. $-5\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

4. $g(t) = 32f(t)$

5. $z = i$

6. No

7. Iperbole

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢