



 Geometria e Algebra II — Scritto del 14/1/08 — Quesiti

Nome _____ Cognome _____ Matricola _____

1. Stabilire la molteplicità della radice $z = -i$ per il polinomio $z^5 + 3iz^4 + 2(2i - 3)z^3 - 2(6 + 5i)z^2 + 3(3 - 4i)z + (4 + 3i)$.

2. Se da un insieme A di vettori è possibile estrarre una base del sottospazio $X = \{x \in \mathbb{R}^5 : x_1 - 3x_2 + \pi x_3 - x_4 + 2x_5 = 7x_1 + x_2 + x_3 - \sqrt{5}x_4 - 3x_5 = 0\}$, quanti elementi può avere A ?

3. Date le basi $\mathcal{B} = (e_1 + 2e_2, 3e_1 + e_2)$ e $\mathcal{C} = (-2e_1 + e_2, 5e_1 - 4e_2)$ di $\mathbb{R}^2$ e il vettore v tale che $[v]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, determinare $[v]_{\mathcal{B}}$.

4. Per una matrice quadrata A , sia $p_A(t)$ il suo polinomio caratteristico. Se A è 4×4 , come sono legati i polinomi $f(t) = p_A(t/3)$ e $g(t) = p_{(3A)}(t)$?

5. Stabilire per quali $z \in \mathbb{C}$ si annulla il determinante della matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2z + i & -1 + i & -1 - 2z \\ 3i & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

6. Dire se esista una base ortonormale di $\mathbb{C}^2$ costituita di autovettori della matrice $\begin{pmatrix} 1 + i & 2 - i \\ -2 - i & 1 \end{pmatrix}$.

7. Determinare il tipo della conica di equazione $5x^2 - 8xy + 4y^2 - 2x - 2 = 0$.

 Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

 1. ♠ 2. ♥ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♦ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♥ 9. ♣ 10. ♦



1. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ siano date la matrice $A_k = \begin{pmatrix} k(3k-7) & k(k-3) & -1 \\ 3k(7-2k) & k(9-2k) & 2 \\ 0 & 0 & k+2 \end{pmatrix}$ e l'applicazione lineare $f_k : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita da $f_k(x) = A_k \cdot x$.

- (A) (2 punti) Determinare il rango di f_1 ;
- (B) (3 punti) Scrivere la matrice che rappresenta f_1 rispetto alla base $\mathcal{B} = (e_1 + e_2, 2e_1 + e_3, e_2 - e_3)$ sia in partenza sia in arrivo;
- (C) (3 punti) Provare che f_1 è diagonalizzabile ed esibire una base di $\mathbb{R}^3$ che la diagonalizza;
- (D) (4 punti) Stabilire per quali k la f_k non è diagonalizzabile.

2. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ sia data la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 0 & k \\ k^2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & k & -1 \\ k & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

e considerare la funzione bilineare $f_k : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ associata ad A_k .

- (A) (3 punti) Stabilire per quali k la f_k è simmetrica;
- (B) (4 punti) Stabilire per quali k la f_k è un prodotto scalare;
- (C) (5 punti) Nei casi in cui f_k è simmetrica ma non è un prodotto scalare, determinare il tipo affine della quadrica cui è associata la matrice A_k .



Risposte esatte

5. $\diamond$

1. 3

2. Almeno 3

3. $\frac{1}{5} \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \end{pmatrix}$ 4. $g(t) = 81f(t)$ 5. $z = -i$

6. Sì

7. Ellisse

1. $\spadesuit$ 2. $\heartsuit$ 3. $\spadesuit$ 4. $\clubsuit$ 5. $\diamond$ 6. $\spadesuit$ 7. $\clubsuit$ 8. $\heartsuit$ 9. $\clubsuit$ 10. $\diamond$
