UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria — Corso di Laurea in Ingegneria Civile, dell'Ambiente e del Territorio

Geometria e Algebra II — Scritto del 13/1/09 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ______

1. Determinare un vettore di $\{z \in \mathbb{C}^3 : \ iz_1 + (2+i)z_2 + 2z_3 = 0\}$ unitario, ortogonale a $(3+i)e_1 + (3-4i)e_2 + (1+2i)e_3$ e avente seconda coordinata immaginaria pura.

2. Completare $-2e_1 - e_2 + e_3 + ie_4$ a una base di $\{z \in \mathbb{C}^4 : \ iz_1 + 2z_2 + (1+i)z_3 + (1-i)z_4 = 0\}$.

3. Nello spazio proiettivo reale di dimensione 5 un sottospazio proiettivo di dimensione 2 e uno di dimensione 3 si incontrano sempre almeno in un punto?

4. Se $A = (v_1,\ v_2,\ v_3) \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{C})$, $\det(A) \neq 0$ e $B = ((1+i)v_1 - v_3,\ 2v_2 + iv_3,\ v_1 - iv_2 + 3v_3)$, quanto vale $\det(B)/\det(A)$?

5. Determinare il tipo affine della quadrica $x^2 - 4xy - y^2 + 6yz - 2x + 4z = 0$.

6. È diagonalizzabile la matrice $\begin{pmatrix} 5 & 0 & -3 \\ 3 & 2 & -2 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$?

7. Determinare il tipo affine della conica $3x^2 - 8xy + 2y^2 + 5x - y + 1 = 0$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Geometria e Algebra II — Scritto del 13/1/09 — Esercizî

1. Per $k \in \mathbb{C}$ considerare la matrice $A_k = \begin{pmatrix} ik & k+1 & -3i \\ -i(k+1) & 2 & k+i \\ 3i & -2k & 3 \end{pmatrix}$.

(A) (4 punti) Trovare i valori di k per i quali A_k è hermitiana e determinare il segno dei suoi autovalori.

(B) (3 punti) Stabilire se esistono k per i quali una matrice multipla scalare non nulla di A_k è antihermitiana oppure unitaria.

(C) (5 punti) Determinare i valori reali di k per i quali $A_k + A_k^*$ non è invertibile e trovare tutti i suoi autovalori.

2. Considerare la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ data da $f(x) = A \cdot x$ e i vettori $v_1 = 5e_1 + 2e_2 + e_3$, $v_2 = 3e_1 + e_2 + e_3$, $v_3 = -2e_1 - 3e_2 + 5e_3$ in $\mathbb{R}^3$.

(A) (1 punti) Provare che $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ è una base di $\mathbb{R}^3$.

(B) (2 punti) Calcolare A^{-1}.

(C) (3 punti) Determinare le matrici $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}_3}$, $[f]_{\mathcal{E}_3}^{\mathcal{B}}$ e $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$.

(D) (3 punti) Stabilire se A sia diagonalizzabile.

(E) (3 punti) Stabilire quale tra v_1, v_2, v_3 formi l'angolo maggiore con la retta ortogonale al piano generato dagli altri due.

Risposte esatte

5. $\diamondsuit$

1. $\frac{1}{\sqrt{11}}\left((2+i)e_1 + ie_2 + (1-2i)e_3\right)$ o il suo opposto

2. Ad esempio con $2ie_1 + e_2,\ e_3 - ie_4$

3. Sì perché in $\mathbb{R}^6$ due sottospazî di dimensioni 3 e 4 hanno in comune almeno una retta

4. $7 + 5i$

5. Iperboloide a due falde

6. No, ha autovalori 1 e 2, ma m.a.$(2) = 2$ e m.g.$(2) = 1$

7. Iperbole

1. $\spadesuit$ 2. $\heartsuit$ 3. $\spadesuit$ 4. $\clubsuit$ 5. $\diamondsuit$ 6. $\spadesuit$ 7. $\clubsuit$ 8. $\heartsuit$ 9. $\clubsuit$ 10. $\diamondsuit$