Geometria e Algebra II — Scritto del 9/6/08 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ␣␣␣␣␣␣

1. Risolvere $2z^3 - (1+i)z^2 - 4(1+i)z - (1+3i) = 0$

2. Completare $3e_1 + 2e_2 - e_3 + e_4$ a una base di $\{x \in \mathbb{R}^4 : \ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 0\}$.

3. Se $\mathcal{B} = (e_1 - 2e_2, 4e_1 - 3e_2)$, $\mathcal{B}' = (e_1 + 2e_2, 3e_1 + 7e_2)$ e $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, calcolare $[v]_{\mathcal{B}'}$.

4. Calcolare gli autovalori di $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

5. Se $X = (v_1,\ v_2,\ v_3) \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{C})$ e $\det(X) = -1$, quanto vale $\det(v_2 + 2iv_3,\ v_1 - v_2 + v_3,\ 2v_1 - iv_2)$?

6. Esibire una base ortonormale di autovettori per $\begin{pmatrix} 3 & 1-i \\ 1+i & 1 \end{pmatrix}$.

7. Determinare il tipo affine della conica $x^2 - 2xy + 2y^2 + 4x - 10y + 14 = 0$.

Geometria e Algebra II — Scritto del 9/6/08 — Esercizî

1. Considerare in $\mathbb{R}^4$ i vettori $v_1 = 3e_1 + e_2 - e_3 - 2e_4$, $v_2 = 2e_1 + e_2 + e_3 + 3e_4$ e $v_3 = e_1 + 3e_2 + 2e_3 + e_4$.

(A) (3 punti) Verificare che costituiscono una base $\mathcal{B}$ di un sottospazio X di $\mathbb{R}^4$ e determinare una presentazione cartesiana per X.

(B) (3 punti) Verificare che le formule

$$\begin{aligned} f(v_1) &= (3k+1)e_1 + ke_2 - (k+2)e_3 - (2k+5)e_4 \\ f(v_2) &= 3ke_1 + ke_2 - ke_3 - 2ke_4 \\ f(v_3) &= (k^2+2k+2)e_1 + (3k^2+1+k)e_2 + (2k^2+k+1)e_3 + (k^2+3k+3)e_4 \end{aligned}$$

definiscono per ogni $k \in \mathbb{R}$ un'applicazione lineare f da X in se stesso. Esibire la matrice che rappresenta f rispetto alla base $\mathcal{B}$ sia in partenza che in arrivo.

(C) (3 punti) Determinare gli autovalori di f e la loro molteplicità algebrica al variare di k.

(D) (3 punti) Determinare per quali k la f è diagonalizzabile.

2. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ considerare la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ k^2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2k & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

(A) (4 punti) Stabilire per quali k la M rappresenta una funzione bilinare simmetrica $\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$.

(B) (4 punti) Stabilire per quali k la M rappresenta un prodotto scalare $\langle\,.\,|\,.\,\rangle$ ed esibire una presentazione parametrica dello spazio X ortogonale rispetto a $\langle\,.\,|\,.\,\rangle$ al vettore $e_1 - e_2 + 2e_3 + e_4$.

(C) (4 punti) Per il valore di k trovato in (A) e non in (B) determinare il tipo affine della quadrica Q associata a M.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria. Dall'inizio della seconda ora si può usare anche un foglio manoscritto contenente enunciati e formule. Si può uscire solo in casi eccezionali. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La soluzione di ogni esercizio deve essere consecutiva su un solo foglio. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto di un esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.

Risposte esatte

5. ♡

1. $z = -1,\ z = -(1+i)/2,\ z = 2+i$

2. Ad esempio con $3e_1 + e_2,\ 2e_1 + e_3$

3. $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

4. $4 \pm i\sqrt{3}$

5. $4(1-i)$

6. $\frac{1}{\sqrt{6+2\sqrt{3}}}\begin{pmatrix} i-1 \\ 1+\sqrt{3} \end{pmatrix},\ \frac{1}{\sqrt{6-2\sqrt{3}}}\begin{pmatrix} i-1 \\ 1-\sqrt{3} \end{pmatrix}$

7. Insieme vuoto

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢