UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria — Corso di Laurea in Ingegneria Civile, dell'Ambiente e del Territorio

Geometria e Algebra II — Scritto del 9/6/08 — Quesiti

Nome _____ **Cognome** _____ **Matricola** ␣␣␣␣␣␣

1. Risolvere $2z^3 + (i-5)z^2 + 2(1+i)z + 1 - 3i = 0$.

2. Esibire una base di Span $\left(e_1 - \sqrt{2}e_3, -\sqrt{2}e_1 + 2e_3, e_1 + 2e_2 + \sqrt{2}e_3 - e_4, -e_2 - \sqrt{2}e_3 + \frac{1}{2}e_4\right) \subset \mathbb{R}^4$.

3. Se $\mathcal{B} = (e_1 + 2e_2, 3e_1 - e_2)$, $\mathcal{B}' = (-e_1 + 4e_2, 2e_1 - 7e_2)$ e $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, calcolare $[v]_{\mathcal{B}'}$.

4. Calcolare gli autovalori di $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

5. Se $A = (v_1,\ v_2,\ v_3) \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{C})$ e $\det(A) = 1$, quanto vale $\det(v_2 + 2iv_3,\ v_1 - v_2 + v_3,\ 2v_1 - iv_2)$?

6. Esibire una base ortonormale di autovettori per $\begin{pmatrix} 3 & 1+i \\ 1-i & -1 \end{pmatrix}$.

7. Determinare il tipo affine della conica $3x^2 - 2xy + 2y^2 + 4x - 10y + 12 = 0$.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria — Corso di Laurea in Ingegneria Civile, dell'Ambiente e del Territorio

Geometria e Algebra II — Scritto del 9/6/08 — Esercizî

1. Considerare in $\mathbb{R}^4$ i vettori $v_1 = 3e_1 + e_2 - e_3 - 2e_4$, $v_2 = 2e_1 + e_2 + e_3 + 3e_4$ e $v_3 = e_1 + 3e_2 + 2e_3 + e_4$.

(A) (3 punti) Verificare che costituiscono una base $\mathcal{B}$ di un sottospazio X di $\mathbb{R}^4$ e determinare una presentazione cartesiana per X.

(B) (3 punti) Verificare che le formule

$$\begin{aligned} f(v_1) &= (3k+1)e_1 + ke_2 - (k+2)e_3 - (2k+5)e_4 \\ f(v_2) &= 3ke_1 + ke_2 - ke_3 - 2ke_4 \\ f(v_3) &= (k^2+2k+2)e_1 + (3k^2+1+k)e_2 + (2k^2+k+1)e_3 + (k^2+3k+3)e_4 \end{aligned}$$

definiscono per ogni $k \in \mathbb{R}$ un'applicazione lineare f da X in se stesso. Esibire la matrice che rappresenta f rispetto alla base $\mathcal{B}$ sia in partenza che in arrivo.

(C) (3 punti) Determinare gli autovalori di f e la loro molteplicità algebrica al variare di k.

(D) (3 punti) Determinare per quali k la f è diagonalizzabile.

2. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ considerare la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ k^2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2k & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

(A) (4 punti) Stabilire per quali k la M rappresenta una funzione bilinare simmetrica $\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$.

(B) (4 punti) Stabilire per quali k la M rappresenta un prodotto scalare $\langle\, . \,|\, . \,\rangle$ ed esibire una presentazione parametrica dello spazio X ortogonale rispetto a $\langle\, . \,|\, . \,\rangle$ al vettore $e_1 - e_2 + 2e_3 + e_4$.

(C) (4 punti) Per il valore di k trovato in (A) e non in (B) determinare il tipo affine della quadrica Q associata a M.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria. Dall'inizio della seconda ora si può usare anche un foglio manoscritto contenente enunciati e formule. Si può uscire solo in casi eccezionali. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La soluzione di ogni esercizio deve essere consecutiva su un solo foglio. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto di un esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.

UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria — Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, dell'Ambiente e del Territorio

Geometria e Algebra II — Scritto del 9/6/08 — Quesiti

Risposte esatte

5. ♢

1. $z = 1,\ z = (i-1)/2,\ z = 2-i$

2. Il primo e il terzo vettore

3. $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

4. $3 \pm i\sqrt{5}$

5. $4(1+i)$

6. $\frac{1}{2\sqrt{3-\sqrt{6}}}\begin{pmatrix} 1+i \\ -2+\sqrt{6} \end{pmatrix},\ \frac{1}{2\sqrt{3+\sqrt{6}}}\begin{pmatrix} 1+i \\ -2-\sqrt{6} \end{pmatrix}$

7. Ellisse

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢