UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Matematica III — Scritto del 27/5/06 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ______

1. La serie di funzioni $\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{nt}/(1+n^2)$ è derivabile termine a termine sull'intervallo $[-1,0]$?

2. Se $a, b : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sono differenziabili e $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ data da $\varphi(x+iy) = a(x,y) + ib(x,y)$ è olomorfa, la matrice jacobiana di $\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)$ è necessariamente in ogni punto una matrice di rotazione?

3. Calcolare $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+4)(x^2-2ix-5)}$.

4. Se $A \subset \mathbb{C}$ è aperto e $\varphi \in \mathcal{H}(A)$, esiste sempre $\psi \in \mathcal{H}(A)$ tale che $\mathrm{d}\psi(z) = \varphi(z)\,\mathrm{d}z$ per ogni z in A?

5. Calcolare i coefficienti di Fourier reali $a_1(f)$ e $b_1(f)$
dove $f(t) = t$ per $|t| \leqslant \pi/2$ e $f(t) = 0$ per $\pi/2 < |t| \leqslant \pi$.

6. Date $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ siano $F = \mathcal{F}(f)$ e $G = \mathcal{F}(g)$ le loro trasformate di Fourier. Se F si annulla fuori da $[-1,2]$ e G si annulla fuori da $[-1,3]$, dove si può concludere che si annulla $\mathcal{F}(f \cdot g)$?

7. Calcolare $\int_\Sigma \langle v|n\rangle$ dove $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2+z^2 = 4,\ x \geqslant -\sqrt{3}\}$, n è un campo vettoriale continuo normale a Σ e unitario, e $v(x,y,z) = (\sin(x), x^3, 1 - z\cos(x))$.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♡ 2. ♣ 3. ♠ 4. ♢ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♠ 8. ♢ 9. ♣ 10. ♡

Matematica III — Scritto del 27/5/06 — Esercizî

1. Per ogni $k \neq 1$ reale sia x_k la soluzione massimale del seguente problema di Cauchy, definita su un intervallo contenuto in $(0, \infty)$:

$$\begin{cases} x' = \frac{x^2 - tx - 1}{t(x-t)}, \\ x(1) = k. \end{cases}$$

(A) (3 punti) Si determini $a \in \mathbb{R}$ tale che $t \mapsto ((x_k(t) - t)^2 - a)/t^2$ sia costante per ogni k.

(B) (4 punti) Si determini x_k, distinguendo i casi $k > 1$ e $k < 1$ e dimostrando in particolare che x_k è sempre definita su $(0, 1]$, mentre è definita su tutto $(0, \infty)$ se e solo se $k \leqslant 0$ oppure $k \geqslant 2$.

(C) (2 punti) Si determini $\lim\limits_{t \to 0^+} x_k(t)$ al variare di $k \neq 1$.

(D) (3 punti) Si determinino i valori di $a, b \in \mathbb{R}$ per cui il seguente problema ammette almeno una soluzione locale:

$$\begin{cases} (tx - t^2)x' + 1 + tx - x^2 = 0, \\ x(a) = b. \end{cases}$$

2. Sia $\omega(x, y, z) = (3x + z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + 2y\mathrm{d}x\mathrm{d}z + (x + 3z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$. Per ogni $s > 0$ sia inoltre

$$V_s = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ (x - z)^2 + 2y^2 = 2\cosh^2((x + z)/\sqrt{2}), \ 0 \leqslant x + z \leqslant s\sqrt{2}\}.$$

(A) (2 punti) Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da $F(x, y, z) = ((x + z)/\sqrt{2}, y, (z - x)/\sqrt{2})$. Si mostri che F conserva le distanze tra punti di $\mathbb{R}^3$ e si determinino equazioni per $F^{-1}(V_s)$.

(B) (3 punti) Si mostri che V_s è una superficie con bordo, e se ne determini una parametrizzazione. (Suggerimento: si consideri la composizione di F con una parametrizzazione di $F^{-1}(V_s)$.)

(C) (3 punti) Si determini l'area di V_s. (Suggerimento: si ricordi che $\cosh^2 a = (1 + \cosh 2a)/2$.)

(D) (2 punti) Sia $\varphi(x, y, z) = -y(x + z)\mathrm{d}x + a(x, z)\mathrm{d}y + y(x + z)\mathrm{d}z$, dove $a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è una funzione. Si determini a affinché risulti $\omega = \mathrm{d}\varphi$.

(E) (2 punti) Si determini $\int_{V_s} \omega$, al variare di $s > 0$.

Matematica III — Scritto del 27/5/06 — Quesiti

Risposte esatte

5. ♡

1. No, per $t = 0$ la serie delle derivate è divergente.

2. No, è multipla non negativa di una matrice di rotazione.

3. $-\pi/26$.

4. Sì se A è semplicemente connesso, ma non in generale.

5. $a_1(f) = 0$, $b_1(f) = 2/\pi$.

6. Fuori da $[-2, 5]$.

7. $\pm\pi \sin(\sqrt{3})$.

1. ♡ 2. ♣ 3. ♠ 4. ♢ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♠ 8. ♢ 9. ♣ 10. ♡