



 Matematica III — Scritto del 27/5/06 — Quesiti

Nome _____ Cognome _____ Matricola _____

1. La serie di funzioni $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx}/(1+n^2)$ è derivabile termine a termine sull'intervallo $[0, 1]$?

2. Se $u, v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sono differenziabili e $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ data da $f(x+iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ è olomorfa, può la matrice jacobiana di $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ avere determinante negativo in qualche punto?

3. Calcolare $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+4)(x^2-2ix-2)}$.

4. Se $\Omega \subset \mathbb{C}$ è aperto e $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, esiste sempre $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ tale che $dg(z) = f(z) dz$ per ogni z in Ω ?

5. Calcolare i coefficienti di Fourier reali $a_2(f)$ e $b_2(f)$
dove $f(t) = t$ per $|t| \leq \pi/2$ e $f(t) = 0$ per $\pi/2 < |t| \leq \pi$.

6. Date $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ siano $F = \mathcal{F}(f)$ e $G = \mathcal{F}(g)$ le loro trasformate di Fourier. Se F si annulla fuori da $[0, 3]$ e G si annulla fuori da $[-1, 1]$, dove si può concludere che si annulla $\mathcal{F}(f \cdot g)$?

7. Calcolare $\int_{\Sigma} \langle v|n \rangle$ dove $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \leq 1\}$, n è un campo vettoriale continuo normale a Σ e unitario, e $v(x, y, z) = (x \sin(z), x^2, \cos(z))$.

 Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

 1. ♥ 2. ♣ 3. ♠ 4. ♦ 5. ◇ 6. ♠ 7. ♠ 8. ♦ 9. ♣ 10. ♥



1. Per ogni $k \neq 1$ reale sia x_k la soluzione massimale del seguente problema di Cauchy, definita su un intervallo contenuto in $(0, \infty)$:

$$\begin{cases} x' = \frac{x^2 - tx - 1}{t(x-t)}, \\ x(1) = k. \end{cases}$$

- (A) (3 punti) Si determini $a \in \mathbb{R}$ tale che $t \mapsto ((x_k(t) - t)^2 - a)/t^2$ sia costante per ogni k .
- (B) (4 punti) Si determini x_k , distinguendo i casi $k > 1$ e $k < 1$ e dimostrando in particolare che x_k è sempre definita su $(0, 1]$, mentre è definita su tutto $(0, \infty)$ se e solo se $k \leq 0$ oppure $k \geq 2$.
- (C) (2 punti) Si determini $\lim_{t \rightarrow 0^+} x_k(t)$ al variare di $k \neq 1$.
- (D) (3 punti) Si determinino i valori di $a, b \in \mathbb{R}$ per cui il seguente problema ammette almeno una soluzione locale:

$$\begin{cases} (tx - t^2)x' + 1 + tx - x^2 = 0, \\ x(a) = b. \end{cases}$$

2. Sia $\omega(x, y, z) = (3x + z)dx dy + 2y dx dz + (x + 3z)dy dz$. Per ogni $s > 0$ sia inoltre

$$V_s = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x - z)^2 + 2y^2 = 2 \cosh^2((x + z)/\sqrt{2}), 0 \leq x + z \leq s\sqrt{2}\}.$$

- (A) (2 punti) Sia $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita da $F(x, y, z) = ((x + z)/\sqrt{2}, y, (z - x)/\sqrt{2})$. Si mostri che F conserva le distanze tra punti di $\mathbb{R}^3$ e si determinino equazioni per $F^{-1}(V_s)$.
- (B) (3 punti) Si mostri che V_s è una superficie con bordo, e se ne determini una parametrizzazione. (Suggerimento: si consideri la composizione di F con una parametrizzazione di $F^{-1}(V_s)$.)
- (C) (3 punti) Si determini l'area di V_s . (Suggerimento: si ricordi che $\cosh^2 a = (1 + \cosh 2a)/2$.)
- (D) (2 punti) Sia $\varphi(x, y, z) = -y(x + z)dx + a(x, z)dy + y(x + z)dz$, dove $a : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione. Si determini a affinché risulti $\omega = d\varphi$.
- (E) (2 punti) Si determini $\int_{V_s} \omega$, al variare di $s > 0$.



Risposte esatte

5. $\diamond$

1. No, per $x = 0$ la serie delle derivate è divergente.
2. No, dalle equazioni di Cauchy-Riemann segue che esso vale $u_x^2 + u_y^2$.
3. $-\pi/20$.
4. Sì se Ω è semplicemente connesso, ma non in generale.
5. $a_2(f) = 0$, $b_2(f) = 1/2$.
6. Fuori da $[-1, 4]$.
7. $\pm 3\pi \cos(1)$.

1. $\heartsuit$	2. $\clubsuit$	3. $\spadesuit$	4. $\diamondsuit$	5. $\diamondsuit$	6. $\spadesuit$	7. $\spadesuit$	8. $\diamondsuit$	9. $\clubsuit$	10. $\heartsuit$
-----------------	----------------	-----------------	-------------------	-------------------	-----------------	-----------------	-------------------	----------------	------------------
