UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Matematica III — Scritto del 19/6/06 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ⎵⎵⎵⎵⎵⎵

1. È continua sull'intervallo $[\pi/4, \pi/2]$ la somma della serie di funzioni $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{1+n^2\sin(x)}$? Spiegare.

2. Determinare i punti nei quali non ammette una inversa locale differenziabile la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ data da $f(x,y) = (x+y, y - \sin(x+y))$.

3. Dire se sia illimitato a sinistra e/o a destra l'intervallo massimale di esistenza della soluzione del problema di Cauchy $x' = x^3 \cdot (\sin(t) - 2)$, $x(0) = 1$.

4. Trovare $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ tale che $a_{n+3} = a_{n+2} + 8a_{n+1} - 12a_n$, $a_0 = 1$, $a_1 = -5$, $a_2 = 1$.

5. Siano $f(t) = 1 - t/\pi$ per $|t| \leqslant \pi$ e $(\alpha_n(f))_{n=0}^{\infty}$ i suoi coefficienti di Fourier complessi.
Calcolare $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \alpha_n(f)$.

6. Sia $g(x) = \int_0^{x+1} f(y)\,\mathrm{d}y$. Come sono legate tra loro le trasformate di Fourier di f e g?

7. Se $y_0, y_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ risolvono la stessa equazione differenziale $y''(t) = \varphi(x, y(x), y'(x))$ e coincidono per $x = -\pi$ e per $x = \pi$, si può concludere che coincidono sempre? Spiegare.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♡ 2. ♣ 3. ♠ 4. ♢ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♠ 8. ♢ 9. ♣ 10. ♡

Matematica III — Scritto del 19/6/06 — Esercizî

1. Sia $a \in \mathbb{R}$, sia $P = (1,1,0) \in \mathbb{R}^3$, e sia ω_a la 2-forma, definita su $\mathbb{R}^3 \setminus \{P\}$, data da:

$$\omega_a = \frac{(x+a)}{f(x,y,z)^{3/2}}\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \frac{a(y-1)}{f(x,y,z)^{3/2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}z + \frac{z}{f(x,y,z)^{3/2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

dove $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-2x-2y+2$. Per ogni $b>0$ sia inoltre

$$S_b = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2+b^2z^2 = b^2\}.$$

(A) (3 punti) Si dimostri che ω_a è chiusa se e solo se $a=-1$.

(B) (2 punti) Si dimostri che S_b è una superficie, se ne dia una parametrizzazione, e si calcoli l'unico valore b_0 per cui si abbia $P \in S_{b_0}$.

(C) (2 punti) Sia Σ_r la sfera di centro P e raggio r. Si mostri che $\int_{\Sigma_r} \omega_{-1} = \pm 4\pi$.

(D) (2 punti) Si calcoli $\int_{S_b} \omega_{-1}$, al variare di $b>0$, $b \neq b_0$.

(E) (3 punti) Si calcoli $\lim_{b\to\infty} \mathrm{Area}(S_b)/b^2$.

2. Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ il semipiano aperto dato dai numeri con parte immaginaria positiva. Sia $g : \Omega \to \mathbb{C}$ definita da $g(x+iy) = \log(x^2+y^2) - 2i\arctan(x/y)$, e, per ogni $b \in \mathbb{R}$, $b>0$, sia $f_b : \Omega \to \mathbb{C}$ data da $f_b(z) = g(z+i)/(b^2+z^2)$. Per ogni $R>0$ siano $\gamma_1^{(R)} : [-R,R] \to \mathbb{C}$, $\gamma_2^{(R)} : [-\pi,\pi] \to \mathbb{C}$ i cammini definiti da $\gamma_1^{(R)}(t) = t$, $\gamma_2^{(R)}(t) = R\,\mathrm{e}^{it}$.

(A) (2 punti) Si mostri che g verifica le equazioni di Cauchy-Riemann.

(B) (3 punti) Si mostri che f_b è meromorfa, e se ne determinino i poli ed i relativi residui.

(C) (3 punti) Si mostri che $\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_2^{(R)}} f_b(z)\mathrm{d}z = 0$.

(D) (4 punti) Si calcolino $\int_0^\infty \frac{\log(1+t^2)}{b^2+t^2}\,\mathrm{d}t$ e $\int_0^\infty \frac{\log(1+t^2)}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

Risposte esatte

5. ♡

1. Sì, ogni termine è continuo e la serie delle norme è convergente.

2. Nessuno.

3. A destra sì, a sinistra no.

4. $a_n = (-3)^n - n2^n$.

5. 1.

6. $G(t) = \mathrm{e}^{it} F(t)/it$.

7. No: $y_0 \equiv 0$, $y_1(x) = \sin(x)$, $\varphi(x, y, y') = -y$.

1. ♡ 2. ♣ 3. ♠ 4. ♢ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♠ 8. ♢ 9. ♣ 10. ♡