UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Matematica III — Scritto del 19/6/06 — Quesiti

**Nome** ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** _ _ _ _ _ _

**1.** È continua sull'intervallo $[0, \pi/4]$ la somma della serie di funzioni $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{1+n^2\cos(x)}$ ? Spiegare.

**2.** Determinare i punti nei quali non ammette una inversa locale differenziabile la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ data da $f(x, y) = (x - \mathrm{e}^{x+y}, x + y)$.

**3.** Dire se sia illimitato a sinistra e/o a destra l'intervallo massimale di esistenza della soluzione del problema di Cauchy $x' = x^3 \cdot (1 + \cos^2(t))$, $x(0) = 1$.

**4.** Trovare $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ tale che $a_{n+3} = 4a_{n+2} + 3a_{n+1} - 18a_n$, $a_0 = -1$, $a_1 = 5$, $a_2 = 14$.

**5.** Siano $f(t) = 1 + t/\pi$ per $|t| \leqslant \pi$ e $(\alpha_n(f))_{n=0}^{\infty}$ i suoi coefficienti di Fourier complessi.
Calcolare $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \alpha_n(f)$.

**6.** Sia $g(x) = f(2x + 1)$. Come sono legate tra loro le trasformate di Fourier di $f$ e $g$?

**7.** Se $x_0, x_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ risolvono la stessa equazione differenziale $x''(t) = f(t, x(t), x'(t))$ e coincidono per $t = -1$ e per $t = 1$, si può concludere che coincidono sempre? Spiegare.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♡ 2. ♣ 3. ♠ 4. ♢ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♠ 8. ♢ 9. ♣ 10. ♡

# Matematica III — Scritto del 19/6/06 — Esercizî

**1.** Sia $a \in \mathbb{R}$, sia $P = (1,1,0) \in \mathbb{R}^3$, e sia $\omega_a$ la 2-forma, definita su $\mathbb{R}^3 \setminus \{P\}$, data da:

$$\omega_a = \frac{(x+a)}{f(x,y,z)^{3/2}}\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \frac{a(y-1)}{f(x,y,z)^{3/2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}z + \frac{z}{f(x,y,z)^{3/2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

dove $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y + 2$. Per ogni $b > 0$ sia inoltre

$$S_b = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + b^2z^2 = b^2\}.$$

(A) (3 punti) Si dimostri che $\omega_a$ è chiusa se e solo se $a = -1$.

(B) (2 punti) Si dimostri che $S_b$ è una superficie, se ne dia una parametrizzazione, e si calcoli l'unico valore $b_0$ per cui si abbia $P \in S_{b_0}$.

(C) (2 punti) Sia $\Sigma_r$ la sfera di centro $P$ e raggio $r$. Si mostri che $\int_{\Sigma_r} \omega_{-1} = \pm 4\pi$.

(D) (2 punti) Si calcoli $\int_{S_b} \omega_{-1}$, al variare di $b > 0$, $b \neq b_0$.

(E) (3 punti) Si calcoli $\lim_{b\to\infty} \mathrm{Area}(S_b)/b^2$.

**2.** Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ il semipiano aperto dato dai numeri con parte immaginaria positiva. Sia $g : \Omega \to \mathbb{C}$ definita da $g(x+iy) = \log(x^2+y^2) - 2i\arctan(x/y)$, e, per ogni $b \in \mathbb{R}$, $b > 0$, sia $f_b : \Omega \to \mathbb{C}$ data da $f_b(z) = g(z+i)/(b^2+z^2)$. Per ogni $R > 0$ siano $\gamma_1^{(R)} : [-R,R] \to \mathbb{C}$, $\gamma_2^{(R)} : [-\pi,\pi] \to \mathbb{C}$ i cammini definiti da $\gamma_1^{(R)}(t) = t$, $\gamma_2^{(R)}(t) = R\,\mathrm{e}^{it}$.

(A) (2 punti) Si mostri che $g$ verifica le equazioni di Cauchy-Riemann.

(B) (3 punti) Si mostri che $f_b$ è meromorfa, e se ne determinino i poli ed i relativi residui.

(C) (3 punti) Si mostri che $\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_2^{(R)}} f_b(z)\mathrm{d}z = 0$.

(D) (4 punti) Si calcolino $\int_0^\infty \frac{\log(1+t^2)}{b^2+t^2}\,\mathrm{d}t$ e $\int_0^\infty \frac{\log(1+t^2)}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria. Dall'inizio della seconda ora si può usare anche un foglio manoscritto contenente enunciati e formule. Si può uscire solo in casi eccezionali. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La soluzione di ogni esercizio deve essere consecutiva su un solo foglio. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto di un esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.

UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Matematica III — Scritto del 19/6/06 — Quesiti

# Risposte esatte

## 5. $\diamondsuit$

**1.** Sì, ogni termine è continuo e la serie delle norme è convergente.

**2.** Nessuno.

**3.** A sinistra sì, a destra no.

**4.** $a_n = n3^n - (-2)^n$.

**5.** 1.

**6.** $G(t) = \mathrm{e}^{it/2}F(t/2)/2$.

**7.** No: $x_0 \equiv 0$, $x_1(t) = \sin(\pi t)$, $f(t, x, x') = -x$.

1. $\heartsuit$ 2. $\clubsuit$ 3. $\spadesuit$ 4. $\diamondsuit$ 5. $\diamondsuit$ 6. $\spadesuit$ 7. $\spadesuit$ 8. $\diamondsuit$ 9. $\clubsuit$ 10. $\heartsuit$