UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Matematica III — Scritto del 16/9/06 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ␣␣␣␣␣␣

1. Siano $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, \cos t)$ per $t \in [0, 2\pi]$ e $\omega(x, y, z) = \mathrm{e}^{\sin x}\,\mathrm{d}x + xz\,\mathrm{d}y$. Calcolare $\int_\alpha \omega$.

2. Siano $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo di vettori, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un aperto limitato e $n : \partial\Omega \to \mathbb{R}^3$ la normale unitaria esterna a Ω. Se $\int_{\partial\Omega} \langle v|n\rangle = 0$ si può concludere che $\mathrm{div}(v) = 0$ su Ω?

3. È una curva l'insieme dei punti di $\mathbb{R}^2$ nell'intorno dei quali la funzione $f(x, y) = (x^2 y, x \sin y)$ non ammette inversa locale differenziabile?

4. Risolvere $a_{n+2} = a_{n+1} + 12a_n$, $a_0 = -1$, $a_1 = -18$.

5. Sia $\Sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ |x| + |y| \leqslant 1, \ z = |x|\}$. Descrivere Σ. Dire in quali punti Σ non ha piano tangente e in quali $\partial\Sigma$ non ha retta tangente.

6. Sia $x(t) = t^2 \cos(t^3)$ per $|t| \leqslant \pi$. Calcolare i coefficienti di Fourier reali $a_0(x)$ e $b_6(x)$.

7. Sia $g(t) = f'(t-1)$ e siano $F = \mathcal{F}(f)$ e $G = \mathcal{F}(g)$ le trasformate di Fourier. Determinare la relazione tra F e G.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♡ 2. ♣ 3. ♠ 4. ♢ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♠ 8. ♢ 9. ♣ 10. ♡

Matematica III — Scritto del 16/9/06 — Esercizî

1. Sia V lo spazio delle soluzioni dell'equazione differenziale

$$x''(t) + \frac{3x'(t)}{t} + \frac{x(t)}{t^2} = 0, \quad t > 0.$$

(A) (2 punti) Si determinino i valori $a \in \mathbb{Z}$ per cui la funzione $t \mapsto t^a$ appartiene a V.

(B) (4 punti) Si determini una base di V.

(C) (3 punti) Si determinino tutte le funzioni $f \in V$ tali che $\lim\limits_{t \to +\infty} t f(t) = 2$.

(D) (3 punti) Si dica per quali valori di $a, b \in \mathbb{R}$ il problema

$$\begin{cases} t^2 x''(t) + 3t x'(t) + x(t) = 0 \\ x(0) = a \\ x'(0) = b \end{cases}$$

ammette una soluzione locale.

2. Sia $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \Re(z) > -1\}$ e si consideri la funzione $f : \Omega \to \mathbb{C}$ definita da

$$f(x + iy) = \log((1 + x)^2 + y^2) + 2i \arctan(y/(1 + x)).$$

Sia infine g la funzione su Ω definita da $g(z) = f(z)/(1 - z^2)$.

(A) (3 punti) Si dimostri che f è olomorfa.

(B) (2 punti) Si dimostri che g è meromorfa e se ne calcolino i poli e i relativi residui.

(C) (3 punti) Per ogni $R > 0$ sia $\gamma_R : [-\pi/2, \pi/2] \to \Omega$ definito da $\gamma_R(t) = R\,\mathrm{e}^{it}$. Si dimostri che $\lim\limits_{R \to +\infty} \int_{\gamma_R} g(z)\mathrm{d}z = 0$.

(D) (4 punti) Si calcoli

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\log(1 + x^2)}{1 + x^2} \mathrm{d}x.$$

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria. Dall'inizio della seconda ora si può usare anche un foglio manoscritto contenente enunciati e formule. Si può uscire solo in casi eccezionali. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La soluzione di ogni esercizio deve essere consecutiva su un solo foglio. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto di un esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.

Risposte esatte

5. $\diamondsuit$

1. 0.

2. No, solo che il suo integrale si annulla.

3. No, è l'unione di una retta verticale e infinite rette orizzontali.

4. $a_n = 2(-3)^n - 3 \cdot 4^n$.

5. Σ è unione lungo l'ipotenusa di due triangoli rettangoli isosceli, che formano un angolo non piatto. Il piano tangente non c'è lungo tale ipotenusa. La retta tangente al bordo non c'è in quattro punti, i vertici dei triangoli.

6. $a_0(x) = \sin(\pi^3)/3\pi$ oppure il doppio, a seconda delle convenzioni, $b_6(x) = 0$.

7. $G(x) = ix\, \mathrm{e}^{-ix} F(x)$.

1. $\heartsuit$ 2. $\clubsuit$ 3. $\spadesuit$ 4. $\diamondsuit$ 5. $\diamondsuit$ 6. $\spadesuit$ 7. $\spadesuit$ 8. $\diamondsuit$ 9. $\clubsuit$ 10. $\heartsuit$