UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Matematica III — Scritto del 15/02/06 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ␣␣␣␣␣␣

1. Se per ogni n è data una funzione $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ continua ed esiste una funzione $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ tale che f_n converge ad f uniformemente su $(0,1]$, si può concludere che f_n converge a f uniformemente anche su $[0,1]$? Dimostrare o esibire un controesempio.

2. Se $f \in \mathcal{H}(\Delta(0,3))$ e $|f(z)| \leqslant 2$ per ogni $z \in \Delta(0,3)$, come si può maggiorare $|f''(0)|$?

3. Se $f = \chi_{[0,1]}$, $F = \mathcal{F}(f)$ è la sua trasformata di Fourier e $g(x) = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}(F)(-x)$, per quali x si ha $g(x) = f(x)$?

4. Di quale funzione olomorfa è parte immaginaria la $v(x,y) = \mathrm{e}^{x^2-y^2}(y\cos(2xy) + x\sin(2xy))$?

5. Calcolare $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$.

6. Sia $f(x) = \cos(x/2)$ per $|x| \leqslant \pi$. Calcolare i coefficienti di Fourier $a_1(f), b_n(f)$.

7. Siano $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2 = z^2,\ z \leqslant 0,\ x+3z \geqslant -4\}$ e $\omega = (x+3z+4)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z$. Calcolare $\int\limits_\Sigma \omega$.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♡ 2. ♣ 3. ♠ 4. ♢ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♠ 8. ♢ 9. ♣ 10. ♡

UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Matematica III — Scritto del 15/02/06 — Esercizî

1. Per ogni $a, h \in \mathbb{R}$ con $h > 0$ si considerino

$$\begin{aligned} \omega_a &= \frac{(x+az)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - 2ay\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z + (x+z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{(x+z)^2+y^2}, \\ C_h &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ (x+z)^2 + y^2 = 1,\ |z| \leqslant h\}, \\ S_h &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ (x+z)^2 + y^2 + z^2 = 1 + h^2,\ |z| \leqslant h\}. \end{aligned}$$

(Si noti che C_h è un cilindro, anche se non retto.)

(A) (3 punti) Si dimostri che ω_a è chiusa se e solo se $a = 1$.

(B) (3 punti) Si dimostri che S_h è una superficie con bordo e che $\partial S_h = \partial C_h$.

(C) (3 punti) Si determini una parametrizzazione di C_h e si calcoli $\int_{C_h} \omega_1$ al variare di $h > 0$.

(D) (3 punti) Si calcoli $\int_{S_h} \omega_1$ al variare di $h > 0$.

2. Si consideri l'equazione differenziale lineare

$$y''(t) + 2ty'(t) + 2y(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R},$$

e sia V lo spazio delle sue soluzioni. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia poi v_n la funzione reale definita da $v_n(t) = \mathrm{e}^{-t^n}$.

(A) (2 punti) Si dimostri che $v_n \in V$ se e solo se $n = 2$.

(B) (4 punti) Si determini una base di V (lasciando indicati gli integrali che non si sanno risolvere).

(C) (2 punti) Sia $y \in V$. Si mostri che y è pari se e solo se $y'(0) = 0$.

(D) (2 punti) Sia $y \in V$. Si mostri che y è dispari se e solo se $y(0) = 0$.

(E) (2 punti) Sia $y \in V$. Si mostri che $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$ (Suggerimento: può risultare utile un Teorema di De l'Hospital).

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria. Dall'inizio della seconda ora si può usare anche un foglio manoscritto contenente enunciati e formule. Si può uscire solo in casi eccezionali. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La soluzione di ogni esercizio deve essere consecutiva su un solo foglio. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto di un esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.

UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Matematica III — Scritto del 15/02/06 — Quesiti

Risposte esatte

5. ♢

1. Se fosse vero f sarebbe continua, ma f può non esserlo. Ad esempio $f = \chi_{\{0\}}$, $f_n \equiv 0$.

2. $4/9$

3. Tutti tranne 0 e 1

4. $z\,\mathrm{e}^{z^2}$

5. $3\pi/2\,\mathrm{e}^2$

6. $a_1(f) = 4/3\pi,\ b_n(f) = 0$

7. 0

1. ♡ 2. ♣ 3. ♠ 4. ♢ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♠ 8. ♢ 9. ♣ 10. ♡