Matematica III — Scritto del 09/01/06 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ␣␣␣␣␣␣

1. Sia $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ tale che $a_{n+3} = 12a_n + 8a_{n+1} - a_{n+2}$, $a_0 = -1$, $a_1 = -5$, $a_2 = -1$.
Calcolare $\lim\limits_{n\to\infty} 2^{-n} a_n$.

2. La serie di funzioni $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(x)}{3+n^2\sin^4(x)}$ converge uniformemente su $[\pi/4, \pi/2]$? E su $\mathbb{R}$?

3. Indagare la natura del punto stazionario $(0,0)$ per il sistema autonomo $x' = \sin(y)\,\mathrm{e}^x,\ \ y' = x - y$.

4. Determinare l'insieme dei punti nei quali la funzione $f(x,y) = (\sin(xy), x^2 - y^2)$ non ammette una inversa locale C^1.

5. Sia (a,b) l'intervallo massimale di definizione della soluzione del problema di Cauchy
$x' = x^4(1+t^2x^4),\ \ x(0) = 1$. Dire se $a = -\infty$ e se $b = +\infty$.

6. Se $g(x) = \int\limits_0^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t$ e $F = \mathcal{F}(f)$, $G = \mathcal{F}(g)$ sono le trasf. di Fourier, come sono legate F e G?

7. Se $f(x) = x^4$ per $|x| \leqslant \pi$, la serie di Fourier di f converge ad f uniformemente su $[-\pi, +\pi]$?

UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Matematica III — Scritto del 09/01/06 — Eserciz $\hat{\imath}$

1. Per ogni intero $n \geqslant 2$ si considerino

$$\begin{aligned}\Sigma_n &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2+y^2+n^2z^2 = n^4, \ x^2+y^2 \leqslant n^2, z > 0\},\\ \omega &= (x\,\mathrm{e}^z \cos y + 1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + (x\,\mathrm{e}^z \sin y - \mathrm{e}^x y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z - \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,\\ D_n &= \{(x,y,\sqrt{n^2-1}) : \ x^2+y^2 \leqslant n^2\}.\end{aligned}$$

(A) (2 punti) Si dimostri che Σ_n è una superficie con bordo e se ne determini una parametrizzazione.

(B) (3 punti) Si ponga su Σ_n una orientazione e si calcoli $\int_{\Sigma_n} \omega$.

(C) (3 punti) Sia A_n l'area di Σ_n. Si dimostri che $A_n = 2\pi n^2 \int_0^1 t\sqrt{1+\frac{t^2}{n^2(n^2-t^2)}}\,\mathrm{d}t$.

(D) (2 punti) Si calcoli $\lim_{n\to\infty} A_n/n^2$ e si dia una motivazione geometrica del risultato ottenuto.

(E) (2 punti) Sia V_n il volume dell'aperto racchiuso da $\Sigma_n \cup D_n$. Si dimostri che $\lim_{n\to\infty} V_n/n^2 = 0$. (Suggerimento: si osservi che $n - \sqrt{n^2-1} < 1/n$.)

2. Sia f la funzione meromorfa definita da $f(z) = \frac{\cos(\pi z)}{(1+z^2)\sin(\pi z)}$ e per ogni intero positivo n sia $R_n \subset \mathbb{C}$ il rettangolo di vertici $\pm(n+1/2) \pm in$.

(A) (5 punti) Si determinino i poli di f e i relativi ordini e residui.

(B) (2 punti) Si dimostri che per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ si ha

$$\left|\frac{\cos(a+ib)}{\sin(a+ib)}\right|^2 = \frac{\cos^2 a + \sinh^2 b}{\sin^2 a + \sinh^2 b}.$$

(C) (2 punti) Si dimostri che $\lim_{n\to\infty} \int_{\partial R_n} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$.

(D) (3 punti) Si calcoli $\sum_{n=0}^{\infty} 1/(1+n^2)$.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria. Dall'inizio della seconda ora si può usare anche un foglio manoscritto contenente enunciati e formule. Si può uscire solo in casi eccezionali. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La soluzione di ogni esercizio deve essere consecutiva su un solo foglio. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto di un esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.

UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Matematica III — Scritto del 09/01/06 — Quesiti

Risposte esatte

9. $\diamondsuit$

1. $a_n = n(-2)^n - 3^n$; $-\infty$

2. Su $[\pi/4, \pi/2]$ sì perché la serie delle norme è maggiorata da un multiplo di $\sum \frac{1}{n^2}$; su $\mathbb{R}$ no perché non converge per $x = 0$

3. Sella

4. L'origine e le iperboli $xy = \pi/2 + k\pi$

5. $a = -\infty$ perché x cresce ed è positiva; $b < +\infty$ per confronto con $x' = x^4$

6. $F(t) = it\,\mathrm{e}^{-it}G(t)$

7. Sì perché estesa con periodicità la f è continua e derivabile a tratti

1. $\spadesuit$ 2. $\heartsuit$ 3. $\clubsuit$ 4. $\heartsuit$ 5. $\spadesuit$ 6. $\diamondsuit$ 7. $\diamondsuit$ 8. $\clubsuit$ 9. $\diamondsuit$ 10. $\spadesuit$