



 Matematica III — Scritto del 09/01/06 — Quesiti

Nome _____ Cognome _____ Matricola _____

1. La serie di funzioni $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(x)}{3+n^2 \sin^4(x)}$ converge uniformemente su $[\pi/4, \pi/2]$? E su \mathbb{R} ?

2. Determinare l'insieme dei punti nei quali la funzione $f(x, y) = (\cos(xy), y^2 - x^2)$ non ammette una inversa locale C^1 .

3. Sia (a, b) l'intervallo massimale di definizione della soluzione del problema di Cauchy $x' = x^4(1 + t^2x^4)$, $x(0) = 1$. Dire se $a = -\infty$ e se $b = +\infty$.

4. Sia $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ tale che $a_{n+3} = 12a_n + 8a_{n+1} - a_{n+2}$, $a_0 = 1$, $a_1 = -4$, $a_2 = 12$.
Calcolare $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-n} |a_n|$.

5. Se $f(x) = x^4$ per $|x| \leq \pi$, la serie di Fourier di f converge ad f uniformemente su $[-\pi, +\pi]$?

6. Se $f(x) = \int_0^{x-1} g(t) dt$ e $F = \mathcal{F}(f)$, $G = \mathcal{F}(g)$ sono le trasformate di Fourier, come sono legate F e G ?

7. Indagare la natura del punto stazionario $(0, 0)$ per il sistema autonomo $x' = \sin(y) e^x$, $y' = y - x$.

 Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

 1. ♥ 2. ♣ 3. ♠ 4. ♦ 5. ♥ 6. ♠ 7. ♠ 8. ♦ 9. ♣ 10. ♥



1. Per ogni intero $n \geq 2$ si considerino

$$\begin{aligned}\Sigma_n &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + n^2 z^2 = n^4, x^2 + y^2 \leq n^2, z > 0\}, \\ \omega &= (x e^z \cos y + 1) dx dy + (x e^z \sin y - e^x y) dx dz - e^x dy dz, \\ D_n &= \{(x, y, \sqrt{n^2 - 1}) : x^2 + y^2 \leq n^2\}.\end{aligned}$$

(A) (2 punti) Si dimostri che Σ_n è una superficie con bordo e se ne determini una parametrizzazione.

(B) (3 punti) Si ponga su Σ_n una orientazione e si calcoli $\int_{\Sigma_n} \omega$.

(C) (3 punti) Sia A_n l'area di Σ_n . Si dimostri che $A_n = 2\pi n^2 \int_0^1 t \sqrt{1 + \frac{t^2}{n^2(n^2 - t^2)}} dt$.

(D) (2 punti) Si calcoli $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n/n^2$ e si dia una motivazione geometrica del risultato ottenuto.

(E) (2 punti) Sia V_n il volume dell'aperto racchiuso da $\Sigma_n \cup D_n$. Si dimostri che $\lim_{n \rightarrow \infty} V_n/n^2 = 0$.

(Suggerimento: si osservi che $n - \sqrt{n^2 - 1} < 1/n$.)

2. Sia f la funzione meromorfa definita da $f(z) = \frac{\cos(\pi z)}{(1+z^2)\sin(\pi z)}$ e per ogni intero positivo n sia $R_n \subset \mathbb{C}$ il rettangolo di vertici $\pm(n + 1/2) \pm in$.

(A) (5 punti) Si determinino i poli di f e i relativi ordini e residui.

(B) (2 punti) Si dimostri che per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ si ha

$$\left| \frac{\cos(a + ib)}{\sin(a + ib)} \right|^2 = \frac{\cos^2 a + \sinh^2 b}{\sin^2 a + \sinh^2 b}.$$

(C) (2 punti) Si dimostri che $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\partial R_n} f(z) dz = 0$.

(D) (3 punti) Si calcoli $\sum_{n=0}^{\infty} 1/(1 + n^2)$.



Risposte esatte

5. ♥

1. Su $[\pi/4, \pi/2]$ sì perché la serie delle norme è maggiorata da un multiplo di $\sum \frac{1}{n^2}$; su \mathbb{R} no perché non converge per $x = 0$
2. Gli assi e le iperboli $xy = k\pi$
3. $a = -\infty$ perché x cresce ed è positiva; $b < +\infty$ per confronto con $x' = x^4$
4. $a_n = (1+n)(-2)^n$; $+\infty$
5. Sì perché estesa con periodicità la f è continua e derivabile a tratti
6. $G(t) = it e^{it} F(t)$
7. Repulsivo

1. ♥ 2. ♣ 3. ♠ 4. ♦ 5. ♥ 6. ♠ 7. ♠ 8. ♦ 9. ♣ 10. ♥
